

Errata.

De veranderingen zijn in de text aangegeven door ① , ② , enz.

Blz. 4 - ① tusschenvoegen de formule: (4.2):

$$(4.2) \quad y' = P'_1 \alpha' + \dots + P'_n x + q'$$

blz.13 - ② „Wij zullen bewijzen:" vervalt. Hiervoor komt in de plaats:
Uit (12.5) volgt:

blz.13 - ③ „Bewijs" vervalt. Hiervoor komt in de plaats:
Men kan dit ook als volgt inzien:

blz.14 - ④ Achter form. (14.4)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1$$

blz.14 - ⑤ Vanaf ⑤ tot het einde van de bladzijde aldus veranderen
Het vlak door het eindpunt van $\underline{e}_2$ evenwijdig aan $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_3$, wordt t.o.van het stelsel K voorgesteld door de vergelijking

$$(14.5) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

blz.15 - ⑥ of, herleid:

$$(15.1) \quad 2x' - 2x^2 - x^3 = 1.$$

blz.15 - ⑦ in form. (15.4) achter $\underline{e}_2$ en achter $\underline{e}_3$ een : te plaatsen

blz.17 - ⑧ Vanaf „Uit de vergelijking" tot „Ook de kentallen" te vervangen door:

Gaat men in (16.4) voor den index waarover niet gesommeerd wordt over tot het assenstelsel (K') dan volgt

$$(17.4) \quad A_{K'}^{K'} v^{K'} = v^{K'}$$

en uit een vergelijking met (17.1) volgt dus dat de intermediaire kentallen $A_{K'}^{K'}$ juist gelijk zijn aan de $A_{K'}^{K'}$ uit (17.1), zoodat achteraf blijkt, dat wij goed deden in (6.1) reeds den kenletter A te gebruiken.

blz.18 - ⑨ achter „algemeen product" komt: of kort product

blz.18 - ⑩ „een dergelijken" vervangen door: iederen willekeurigen

blz.18 - ⑪ „(Zie opgave)" wordt (Zie de opgave boven)

blz.19 - ⑫ De opgave wordt als volgt geschreven:

Opgave: Bewijs op dezelfde manier, dat de affinor $\underline{u}^K_{\lambda}$ geschreven kan worden als de som van producten van twee vectoren.

Mist blz.

3-4-5-6

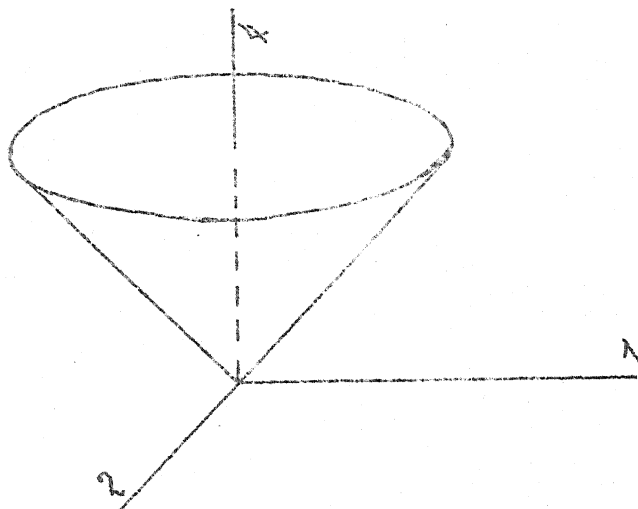
30-31

64-65-66-67.

- blz.20 - (13) Aan de opgave toevoegen:
en dus geen invariante bewerking is.
- blz.20 - (14) Het gedeelte vanaf (14) tot de opgave, vervalt.
- blz.23 - (15) Form. (23.2) wordt als volgt geschreven:

$$(23.2) \quad g_{\kappa\lambda} x^{\kappa} x^{\lambda} = 1.$$

- blz.29 - (16) Is $p_{\lambda\kappa}$ een reële tensor (d.w.z. een tensor met reële kentallen) van den rang n , dan kan het assenstelsel steeds reël zoo gekozen worden, dat
- blz.29 - (17) tusschenvoegen het woord: reël
- blz.29 - (18) "een dergelijken vorm krijgt," vervangen door: een vorm als (28.7) krijgt,
- blz.30 - (19) Aan toevoegen: Van een vector met positive resp. negative invariant zegt men dat hij in het $+$ -gebied resp. $-$ -gebied ligt.
- blz.30 - (20) De figuur moet er als volgt uitzien:



- blz.31 - (21) tusschenvoegen: die of beide in het $+$ -gebied of in het $-$ -gebied liggen.

- blz.31 - (22) achter form. (31.2) komt: $\begin{cases} + \text{voor het } + \\ - \text{voor het } - \end{cases}$

- blz.35 - (23) vervolgen met: (we laten de indices v
- blz.35 - (24) in form. (35.2) vervalt:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_1 i_1 + y_1 i_2 + z_1 i_3 + ct_1 i_4 = \\ &= x'_1 i'_1 + y'_1 i'_2 + z'_1 i'_3 + ct'_1 i'_4 \end{aligned}$$

- blz.35 - (25) Hier tusschenvoegen:
Inderdaad is

$$\begin{aligned} &x'_1 i'_1 + y'_1 i'_2 + z'_1 i'_3 + ct'_1 i'_4 = \\ (35.3) \quad &(x \cos \psi + y \sin \psi) (i_1 \cos \psi + i_2 \sin \psi) + \\ &+ (-x \sin \psi + y \cos \psi) (-i_1 \sin \psi + i_2 \cos \psi) + x_3 i_3 + ct_4 i_4 = \\ &x_1 i_1 + y_1 i_2 + z_1 i_3 + ct_4 i_4 \end{aligned}$$

blz. 35 - (26) form. (35.3) wordt (35.4)

blz. 35 - (27) form. (35.4) wordt (35.5)

blz. 35 - (28) hier komt nog:

Inderdaad is ook hier

$$x'_1 i + y'_2 i + z'_3 i + ct'_4 i = x^1 i + y^2 i + z^3 i + ct^4 i$$

blz. 37 - (29) tusschenvoegen: (en dus de index +4 of 0 is)

blz. 37 - (30) "orthogonaal" onderstrepen.

blz. 38 - (31) en (32) in beide gevallen vervolgen met:
, dus niet in de ruimte-tijd-wereld der relativiteitstheorie

blz. 42 (33) tusschenvoegen: van n^k

blz. 42 - (34) tusschenvoegen: (en dus de pijl van n_λ naar buiten !)

blz. 42 - (35) ∇ wordt ∂

blz. 43 - (36) - (37) - (38) en (39) ∇ wordt ∂

Relativistische Mechanica.

Inleiding.

De bedoeling van dit college is niet om te onderzoeken of de relativiteitstheorie al of niet juist is, maar om de techniek ervan te behandelen. Het doel van de Mechanica en Physica is de waarnemingscijfers zoo te ordenen, dat men na vele waarnemingen de verdere kan voorspellen. Hiervoor maken wij een gedachtenschema naast de realiteit, stellen symbolen en regels op en zorgen dat een gebeurtenis in de realiteit een corresponderend geval in het schema heeft. Het schema is dus niet absoluut; er kunnen meerdere goede schema's zijn. De meetkunde van Euclides, gecombineerd met de principes $K = m \cdot a$ en actie is gelijk reactie geeft met de algebra een afgesloten geheel, n.l. de klassieke mechanica van Newton. Dit is een zeer geslaagd schema, maar wij weten, dat het slechts ten deele goed is. Het is gebleken, dat dit schema heel goed aan de realiteit beantwoordt als $\frac{v}{c} \ll 1$ en $m \gg$ massa van het electron.¹⁾

De eenvoudige relativiteitstheorie behandelt hoofdzakelijk die gevallen, waarin v niet meer $\ll c$ is en waarbij men alleen op de snelheden let. De algemeene relativiteitstheorie houdt zich ook bezig met de theorie van gravitatie en versnellingen, die voor de eenvoudige relativiteitstheorie een gevaarlijk terrein is. Zijn de massa's niet langer $\gg$ dan die van het electron, dan komt men op het gebied van de quantentheorie. De combinatie van deze laatste met de relativiteitstheorie is nog niet op in alle opzichten bevredigende wijze gelukt. Uitgangspunt van de relativiteitstheorie is het beschouwen van de gebeurtenissen als 4-dimensionaal. Wij moeten daarom eerst de 4-dimensionale of algemener de n-dimensionale Meetkunde ontwikkelen.

1) Het teeken $\ll$ beteekent dat de grootheid links te verwaarlozen is ten opzichte van de grootheid rechts. $\gg$ is de omkeering van $\ll$.

De Ruimte-Tijd-Wereld.

Dit is een 4-dimensionale ruimte met 3 ruimte-assen en 1 tijd-as. Een klassiek 1-dimensionaal gebeuren, b.v. de beweging van een punt langs een lijn, b.v. de x-as, is relativistisch een 2-dimensionaal gebeuren in het x, t vlak. Het punt beschrijft een wereldlijn. Heeft het punt een gelijkmatige snelheid, dan is de wereldlijn van dat punt recht. Een lijn, die met ^{een voor}val zijn punten gelijke gelijkmatige snelheid beweegt, geeft een vlak in de Ruimte-tijd-wereld. Twee aldus bewegende lijnen hebben slechts op een bepaald moment een punt gemeen; twee vlakken in de 4-dimensionale ruimte snijden elkaar dan ook in één punt. In de 4-dimensionale wereld kan men zich nog een 3-dimensionale ruimte, hypervlak, denken, die b.v. verkregen wordt door aan alle punten van een vlak dezelfde gelijkmatige snelheid te geven. Een bewegend vlak en een bewegende lijn hebben een bewegend punt gemeen. Een hypervlak en een vlak in de 4-dimensionale ruimte snijden elkaar dan ook in een lijn, in dit geval de wereldlijn van het bovengenoemd snijpunt.

Opgave: Bewijs dat een lijn en een vlak in de R-T-wereld in den regel geen punt gemeen hebben, door de lijn en het vlak op te vatten als verkregen te zijn door de beweging van een punt resp. een lijn in de 3-dimensionale ruimte. Bewijs evenzoo, dat een lijn en een hypervlak in de R-T-wereld slechts één punt gemeen hebben

Men kan zich zoo'n 4-dimensionale ruimte evenmin voorstellen als een n-dimensionale ruimte. Om het steeds terugwerken op de 3-dimensionale ruimte te voorkomen wordt, uitgaande van de volgende tabel een nieuwe meetkunde ontwikkeld.

	lijn	vlak	hypervlak
lijn	kruisen	kruisen	p
vlak	kruisen	p	l
hypervlak	p	l	vl.

Hierin beteekenen p, l en vl respectievelijk: punt, lijn en vlak gemeen.

Flidden mij een eerste voorbeeld van twee
geometrische objecten, die bij algemene coördinatentransformaties
verschillend transformeren maar bij inperking van getransformeerde coördinaten
coördinatentransformaties dezelfde transformaties ondergaan en
dus gelijksoortig worden. 7-

Men kan dus een contravarianten vector meetkundig voorstellen
door een puntenpaar met een zin, die aangeeft welk punt het eer-
ste en welk het tweede is. Die zin kan b.v. aangegeven worden
door een pijl, men krijgt als meetkundige voorstelling dan een pijl,
die begint in het eerste en eindigt in het tweede punt. In de
keuze van één der punten is men volkomen vrij, het puntenpaar is
slechts bepaald op evenwijdige verplaatsing na. De kentallen van
den vector zijn de coördinatenverschillen van de projecties van
begin- en eindpunt op de coördinatenassen, positief gerekend
wanneer de meegeprojecteerde pijl in de positieve asrichting wijst.

Zoolang men alleen transformaties beschouwt, waarbij de
oorsprong van het coördinatenstelsel vast is, kan men een contra-
varianten vector ook door één ^{aan het} punt voorstellen; het eerste punt
kan men dan n.l. in den oorsprong nemen. Alleen in dit geval
transformeert een punt zich als een contravariante vector. ~~hier~~

Onder het product van een skalar p (een getal) met een
contravarianten vector x^k wordt verstaan de contravariante vec-
tor met de kentallen $p x^k$. ~~By vermenigvuldigen met p~~
wordt een contravariante vector dus $|p|$ maal zoo lang. De zin verandert
alleen van te negatief is.
Covariante vectoren.

De vergelijking van een hypervlak luidt in zijn normaal-
vorm:

$$(7.1) \quad u_1 x^1 + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n = 1 \quad \text{of} \quad u_k x^k = 1.$$

Dit vlak snijdt de x^1 -as in het punt $x^1 = \frac{1}{u_1}$. Men ^{kan} ~~kan~~ $u_1, \dots, u_n$ dus
beschouwen als de hypervlakcoördinaten ^{van} ~~van~~ een hypervlak. Hoe transformee-
ren deze kentallen zich ~~zich~~ ^{zich} wanneer de oorsprong vastgehou-
den wordt ($x^{k'} = 0$)? Uit de nieuwe vergelijking

$$(7.2) \quad u_{k'} x^{k'} = 1$$

en de oude vergelijking (7.1) volgt

$$(7.3) \quad u_{k'} A_k^{k'} x^k = 1$$

en dus

$$(7.4) \quad u_k = A_k^{k'} u_{k'}$$

of omgekeerd

Hij het stelsel (K') behooren ^(eveneens) ~~ook weer~~ maatvectoren, waaraan men de kentallen ook weer kan betrekken op elk willekeurig ander stelsel. Zoo zijn

$e_{\lambda'}^{K'}$ $e_{\lambda'}^{K'}$ ^(kentallen van de) de maatvectoren van ~~stelsel~~ (K') betrokken op (K')
 $e_{\lambda}^{K'}$ $e_{\lambda}^{K'}$ de kentallen van de maatvectoren van (K') , betrokken op (K)
 $e_{\lambda}^{K'}$ $e_{\lambda}^{K'}$ de kentallen van de maatvectoren van (K) , betrokken op (K') ^(lijmalle 10/0)

Overschuiving van een contravarianten met een covarianten vector

Laat v^K een contravariante, ν_{λ} een covariante vector zijn. Onder overschuiving verstaan wij de som

$$(10.1) \quad v^K \nu_{\lambda}$$

Deze som is invariant bij coördinatentransformaties

Bewijs:

$$(10.2) \quad v^{K'} = A_{\lambda'}^{K'} v^K \quad \nu_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\lambda} \nu_{\lambda}$$

$$(10.3) \quad v^{K'} \nu_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{K'} A_{\lambda'}^{\lambda} v^K \nu_{\lambda} = A_{\lambda'}^{K'} v^K \nu_{\lambda} = v^K \nu_{\lambda}$$

De meetkundige beteekenis van

$$(10.4) \quad v^K \nu_K = 1$$

is, dat de contravariante vector v^K precies past tusschen de twee hypervlakken, die ν_{λ} voorstellen en bovendien ^{met} de lijn van beide grootheden overeenkomen.

Een hypervlak bevat ∞^{n-1} richtingen, die de $(\frac{n-1}{n-1})$ -richting van het hypervlak vormen. Door de $(n-1)$ -richting is het hypervlak bepaald op evenwijdige verplaatsing na. De meetkundige beteekenis van $v^{\lambda} \nu_{\lambda} = 0$ is ^(dus) ~~is~~, dat de richting van v^{λ} ligt in de $(n-1)$ -richting van ν_{λ} .

Reciproke vectoren

Wanneer men n lineair onafhankelijke contravariante vectoren v^{λ} (λ is een doode index) door n ^{pijlen} puntenpaaren voorstelt en voor het beginpunt steeds hetzelfde punt kiest, dan bepalen deze ^{pijlen} punten een n -dimensionaal parallelotoop. Hetzelfde geldt voor n lineair onafhankelijke covariante vectoren ν_{λ} , als men de beginvlakken

door hetzelfde punt ligt. Kiest men voor beide stelsels een en hetzelfde beginpunt, dan kan men zich afvragen, waardeur deze beide stelsels hetzelfde parallelotrup bepalen. Uit het voorgaande volgt dadelijk, dat moet gelden

$$(11.1) \quad v_1^k w_k = 1 \quad v_2^k w_k = 0 \quad \dots \quad v_n^k w_k = 0, \text{ enz.}$$

wat men ook als volgt kan schrijven

$$(11.2) \quad v_\lambda^\rho w_\rho^k = \delta_\lambda^k \begin{cases} = 1 & (k = \lambda) \\ = 0 & (k \neq \lambda) \end{cases}$$

δ_λ^k is het symbool van Kronecker. Het stelt n^2 scalaires voor, die de waarde 1 of 0 hebben en die men tot een matrix verenigen kan:

$$(11.3) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

De indices van het Kroneckersymbool zijn dood, men zou dus eigenlijk moeten schrijven δ_λ^k . Men laat hier uit historische overwegingen ^{over} kleine inconsequentie toe.

Re. Twee stelsels van n vectoren, die aan (11.2) voldoen, noemen wij ten opzichte van elkaar reciproke stelsels. De maatvectoren e_λ^k vormen dus twee reciproke stelsels.

Overschuift men een contravarianten vector met de n covariante maatvectoren, dan krijgt men n scalaires, die wij aanduiden met v^k

$$(11.4) \quad v^k = v^\lambda e_\lambda^k$$

Omdat de kentallen van e_λ^k 1 of 0 zijn, al naar ^{made} λ gelijk of ongelijk is aan k , is het duidelijk, dat voor het stelsel (k) de volgende gelijkheid geldt:

$$(11.5) \quad v^k \stackrel{*}{=} v^k$$

Wij schrijven hier $\stackrel{*}{=}$ en bedoelen daarmee, dat de gelijkheid alleen geldt voor het coördinatenstelsel, dat in de vergelijking zelf optreedt, ^{maar} en niet voor alle coördinatenstelsels geldt. v^k is n.l.

een systeem van n scalairen, die elk op alle coördinatensystemen hetzelfde kentallen hebben, namelijk v^k , terwijl de v^k als kentallen van een vector overgaan in $v^{k'}$. De overgang (11.4) van de levende indices van v^k tot de doode indices van $v^{k'}$ heet het smoren van den index k .

12. Uit (11.5) volgt een voorschrift om de kentallen van een vector v^k op een bepaald stelsel te vinden; men overschuift n.l. dezen vector met den passenden maatvector van dit stelsel. Wil men b.v. de kentallen op het stelsel (k') weten dan vormt men

$$(12.1) \quad v^{k'} = e_{\lambda}^{k'} v^{\lambda}.$$

Dit zijn de gezochte kentallen als scalairen geschreven. Het 3-kental is dus als scalar geschreven:

$$(12.2) \quad v^{3'} = e_{\lambda}^{3'} v^{\lambda}.$$

Wij hebben reeds gezien, dat de maatvectoren lineair onafhankelijk zijn. Het moet dus mogelijk zijn een vector v^k te schrijven als som van veelvouden der contravariante maatvectoren, d.w.z. als $\hat{v}^{\lambda} e_{\lambda}^k$, maar $\hat{v}^{\lambda}$ scalairen zijn. Wij zullen bewijzen:

$$(12.3) \quad v^k = \hat{v}^{\lambda} e_{\lambda}^k$$

waar $\hat{v}^{\lambda}$ is gedefinieerd met behulp van (11.4).

Bewijs:
$$\hat{v}^{\lambda} e_{\lambda}^k = e_{\mu}^{\lambda} v^{\mu} e_{\lambda}^k = v^{\mu} (e_{\mu}^1 e_1^k + e_{\mu}^2 e_2^k + \dots + e_{\mu}^n e_n^k) =$$

(12.4)

$$\boxed{v^{\mu} e_{\mu}^k} = v^k.$$

hetzelfde

De beide vergelijkingen (11.4) en (12.3) geven in getallen precies weer, doch hebben meetkundig geheel verschillende beteekenis.

Ten opzichte van coördinatentransformaties gedragen zij zich ook geheel anders; (11.4) geeft een gelijkheid van scalairen, terwijl (12.3) een gelijkheid van vectoren aangeeft. Op een ander stelsel (k') geschreven luiden deze vergelijkingen:

$$(12.5) \quad v^{k'} = v^{\lambda'} e_{\lambda'}^{k'}$$

resp.:

$$(12.6) \quad v^{k'} = \hat{v}^{\lambda'} e_{\lambda'}^{k'}.$$

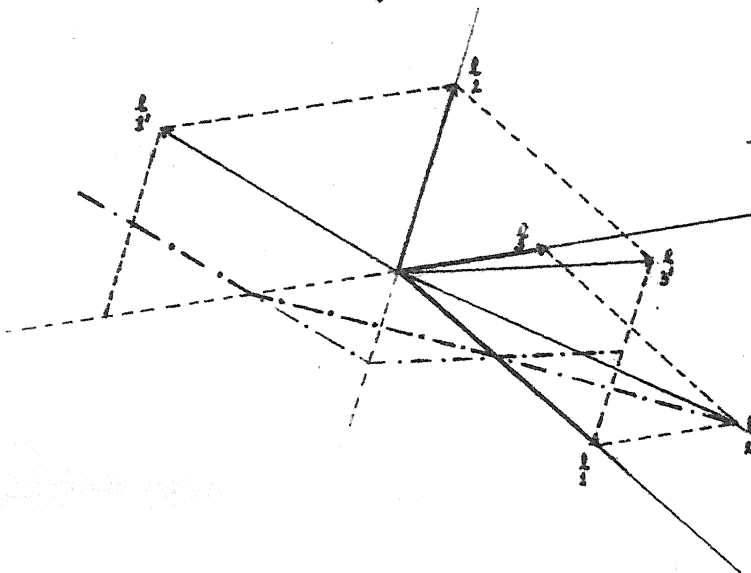
Voorbeeld.

Voor $n = 3$ hebben de drie contravariante maatvectoren de kentallen

$$\begin{aligned}
 (13.1) \quad e_1 : \quad e_1^1 &= 1 & e_1^2 &= 0 & e_1^3 &= 0 \\
 e_2 : \quad e_2^1 &= 0 & e_2^2 &= 1 & e_2^3 &= 0 \\
 e_3 : \quad e_3^1 &= 0 & e_3^2 &= 0 & e_3^3 &= 1.
 \end{aligned}$$

De kentallen van de bij het assenstelsel (κ') behorende maatvectoren zijn $e_{\lambda'}^{\kappa}$. Nemen wij hiervoor:

$$\begin{aligned}
 (13.2) \quad e_{1'} : \quad e_{1'}^1 &= 0 & e_{1'}^2 &= 1 & e_{1'}^3 &= -2 \\
 e_{2'} : \quad e_{2'}^1 &= 1 & e_{2'}^2 &= 0 & e_{2'}^3 &= 1 \\
 e_{3'} : \quad e_{3'}^1 &= 1 & e_{3'}^2 &= 1 & e_{3'}^3 &= 0
 \end{aligned}$$



*Letten in
de figuur
aanwijzen
en niet zo acherover*

3) Brengt men nu b.v. het vlak aan door het eindpunt van e_1 evenwijdig aan e_2 en e_3 , dan blijkt, dat dit vlak op het stelsel (κ) wordt voorgesteld door de vergelijking

$$(13.3) \quad \frac{1}{2}x^1 - \frac{1}{2}x^2 - x^3 = 1.$$

(In de figuur zijn de snijlijnen van dit vlak met de coördinaatvlakken van (κ) aangegeven door - - - - -)

Hieruit volgt, dat de kentallen van den covarianten maatvector $e^{\lambda'}$ op het stelsel (κ) zijn $(2, -2, -1)$. Evenzoo vindt men de kentallen van e^1 en e^2 :

$$\begin{aligned}
 (14.1) \quad \begin{aligned} \vec{e}'_1 &: (1, -1, -1). \\ \vec{e}'_2 &: (2, -2, -1). \\ \vec{e}'_3 &: (-1, 2, +1). \end{aligned}
 \end{aligned}$$

De oude maatvectoren kan men ook ontbinden volgens de nieuwe assen (d.w.z. men zoekt $\vec{e}^{k'}, \vec{e}_{k'}$). Deze kentallen vindt men volgen (12.1) door deze vectoren met de nieuwe maatvectoren te verschuiven. Zoo zijn de nieuwe kentallen van $\vec{e}$ (als scalar geschreven)

$$(14.2) \quad \vec{e}_1^k \vec{e}_k^{\lambda'} \quad \text{dus volgens (14.1): } (1, 2, -1).$$

Evenmoo vinden wij voor de kentallen van $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ op het stelsel (k')

$$\begin{aligned}
 (14.3) \quad \begin{aligned} \vec{e}_1 & \quad (-1, -2, 2) \\ \vec{e}_2 & \quad (-1, -1, +1). \end{aligned}
 \end{aligned}$$

II 5. Affinoren.

Definitie. Onder affinoren van de contravariante valentie p , en de covariante valentie q verstaan wij een grootheid met n^{p+q} kentallen, die zich transformeeren volgens

$$(14.4) \quad P^{k'_1 \dots k'_p}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_q} = A^{k'_1}_{k_1} \dots A^{k'_p}_{k_p} A^{\lambda'_1}_{\lambda_1} \dots A^{\lambda'_q}_{\lambda_q} P^{k_1 \dots k_p}_{\lambda_1 \dots \lambda_q} \quad 1)$$

De som $p+q$ heet de valentie van den affinor.

Een scalar is op te vatten als een affinor van de valentie nul, een vector als een affinor van de valentie 1. Contravariante vector als de contravariante valentie 0. Covariante vector als de covariante valentie 0.

Wanneer een affinor meer dan één index heeft, dan kan men grootheden beschouwen, waarvan enkele indices op het eene, en de andere op het ander stelsel betrekking hebben. De zoo verkregen kentallen worden intermediaire kentallen van den affinor genoemd; b.v.

$$(14.5) \quad P_{\lambda}^{k'} = A^{k'}_k P_{\lambda}^k = A^{\lambda'}_{\lambda} P_{\lambda'}^{k'}$$

1) Bij affinoren worden, op zeer weinige uitzonderingen na, co- en contravariante nooit onder elkaar geschreven omdat de errand heeft dat dit indices tot verwarringen aanleiding kan geven.

Eenheidsaffinor.

Een affinor P_{λ}^k van de covariante valentie 1 en de contravariante valentie 1 stelt een homogene lineaire transformatie voor

$$(15.1) \quad P_{\lambda}^k v^{\lambda} = w^k.$$

Aan elken vector v^{λ} wordt een vector w^k toegevoegd. Dit verband is éénéénduidig, als ~~det.~~ $\det. (P_{\lambda}^k) \neq 0$ en er dus een omkeering bestaat

$$(15.2) \quad \tilde{P}_{\lambda}^k w^{\lambda} = v^k.$$

(De kernletter van de omkeering wordt gevormd door bovenplaatsing van -1, deze index, die eigenlijk een exponent is, kan hier niet op de gewone plaats komen, omdat die al voor contravariante indices gereserveerd is). De matrix $\tilde{P}_{\lambda}^k$ kan uit de matrix P_{λ}^k gevonden worden. $\tilde{P}_{\lambda}^k$ is b.v. gelijk aan den minor van P_{λ}^k uit de determinant $|P_{\lambda}^k|$, gedeeld door de waarde van deze determinant.

De eenheidsaffinor is die affinor, die elken vector in zichzelf transformeert

$$(15.3) \quad A_{\lambda}^k v^{\lambda} = v^k.$$

Bij den eenheidsaffinor wordt plaatsing der indices boven elkaar toegelaten. Deze affinor heeft de kentallen 1 als $k = \lambda$ en 0 als $k \neq \lambda$. De matrix van de kentallen van A_{λ}^k op het stelsel (k) ziet er dus als volgt uit

$$(15.4) \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right|$$

Dit is ^{de} ~~het~~ zelfde matrix die ook bij het Kronecker symbool optrad. Derhalve is

$$(15.5) \quad A_{\lambda}^k = \delta_{\lambda}^k.$$

Men mag echter volstrekt niet schrijven

$$(15.6) \quad A_{\lambda}^k = \delta_{\lambda}^k$$

want links staat een affinor, rechts een stelsel van n^2 scalairen. Weliswaar is ook

$$(16.1) \quad A_{\lambda'}^{k'} = \delta_{\lambda'}^{k'}$$

links kunnen we echter ook overgaan tot de intermediaire kentallen $A_{\lambda'}^{k'}$ en $A_{\lambda'}^k$, en rechts niet. Uit de vergelijking

$$(16.2) \quad A_{\lambda'}^k = A_{\lambda'}^{\lambda} A_{\lambda}^k$$

volgt, dat deze intermediaire kentallen juist gelijk zijn aan de $A_K^{k'}$ uit (5.3) en de A_K^k uit (6.1), zoodat achteraf blijkt dat wij goed deden daar reeds den kernletter A te gebruiken. Ook de kentallen der n maatvectoren e_{λ}^k en evenzoo die van e_{λ}^k laten zich tot een matrix vereenigen, die dezelfde is als die van δ_{λ}^k . Dientengevolge is

$$(16.3) \quad A_{\lambda}^k = e_{\lambda}^k = e_{\lambda}^k = \delta_{\lambda}^k$$

maar men mag hier nergens het gewone gelijkeken zetten, een affinor kan niet gelijk zijn aan een stelsel van n vectoren, wel kunnen op een zeker coördinatenstelsel de n^2 kentallen van een affinor toevallig gelijk worden aan de $n \times n$ kentallen der vectoren. Uit deze beschouwingen blijkt, dat een matrix zonder meer nog maar een los schema van n^2 getallen is. Zoo'n matrix krijgt pas geometrische beteekenis wanneer daarnaast nog extra wordt gegeven hoe die n^2 getallen zich transformeeren bij coördinaten-transformaties. Daar $A_K^{k'}$ de eenheidsaffinor is, beteekent de vergelijking

$$(16.4) \quad v^{k'} = A_K^{k'} v^k$$

dat de vector bij overschuiving met den eenheidsaffinor niet verandert. Deze vergelijking heeft dus dezelfde beteekenis als (15.3), ~~alleen wordt hetzelfde feit ten deele op een ander coördinatenstelsel beschreven.~~ *De eenheidsaffinor is a priori in de $\mathcal{L}_n$ aanwezig.*

Invariante Bewerkingen op affinoren

Optellen. Het optellen van affinoren is alleen mogelijk, als de betrokken affinoren dezelfde valenties hebben b.v.

$$(16.5) \quad S_{\mu\lambda}^{k\dots k} = P_{\mu\lambda}^{k\dots k} + R_{\mu\lambda}^{k\dots k}$$

Opgave.

Laat zien, dat de optelling onafhankelijk is van het coördinatenstelsel.

Vermenigvuldiging. Onder het algemeene product van affinoren in een bepaalde volgorde verstaan wij een affinor, waarvan de kentallen door vermenigvuldiging worden verkregen en waarvan de indicesvolgorde bepaald wordt door die der te vermenigvuldigen affinoren b.v.

$$(17.1) \quad S_{\mu\lambda\dots\tau}^{\dots K\rho\sigma} = \mathcal{Q}_{\mu\lambda}^{\dots K} S^{\rho\sigma} w_{\tau}.$$

Voor deze vermenigvuldiging gelden de gewone regels uit de algebra met uitzondering van de commutatieve wet; zoo is b.v., als $v^K \neq w^K$ is

$$(17.2) \quad S^{\lambda K} = v^{\lambda} w^K \neq w^{\lambda} v^K = T^{\lambda K}.$$

Opgave: Bewijs dat $e_{\lambda}^{\rho} e_{\rho}^K = A_{\lambda}^K$.

De affinor $S^{\lambda K}$ in (17.2) kan als product van twee vectoren geschreven worden. Een willekeurige affinor van de contravariante valentie 2 heeft deze eigenschap niet. Wel kunnen wij bewijzen, dat men een dergelijke affinor kan schrijven als een som van producten van vectoren. Wij gebruiken hiervoor de vergelijking

$$(17.3) \quad e_{\lambda}^{\rho} e_{\rho}^K = A_{\lambda}^K \quad (\text{zie opgave})$$

tengevolge waarvan:

$$(17.4) \quad R^{K\lambda} = A_{\rho\sigma}^{K\lambda} R^{\rho\sigma} = e_{\mu}^K e_{\rho}^{\mu} e_{\nu}^{\lambda} e_{\sigma}^{\nu} R^{\rho\sigma} \\ = e_{\mu}^K e_{\nu}^{\lambda} (e_{\rho}^{\mu} e_{\sigma}^{\nu} R^{\rho\sigma}).$$

Het stuk tusschen haakjes stelt een scalar voor, dien wij aanduiden met $\overset{\mu\nu}{R}$; $\overset{\mu\nu}{R}$ is het $(\mu\nu)$ -kental van $R^{K\lambda}$ als scalar geschreven. Men heeft dus

$$(17.5) \quad R^{K\lambda} = \overset{\mu\nu}{R} e_{\mu}^K e_{\nu}^{\lambda}.$$

Opgave: Bewijs op dezelfde manier, dat elke affinor geschreven kan worden als de som van producten van vectoren.

Op blz. ~~15~~ hebben wij gezien, dat een affinor P_{λ}^k aan elken vector v^k een vector w^k toevoegt. Eischt men, dat P_{λ}^k den vector v^k aan w^k toevoegt, dan is P_{λ}^k hierdoor nog niet bepaald. Men kan eischen, dat n lineair onafhankelijke vectoren v^k (aan n vectoren w^k) worden toegevoegd volgens:

(18.1)

$$P_{\lambda}^k v_{\lambda}^{\lambda} = w_{\lambda}^k.$$

(kunnen worden bepaald.)

Dit zijn n^2 vergelijkingen ~~voor de n^2 onbekende kentallen van P_{λ}^k~~ . Er is dus een affinor T_{λ}^k , die de n maatvectoren e_{λ}^k aan stelsel (k) toevoegt aan de n maatvectoren $e_{\lambda'}^k$ van stelsel (k') . Deze affinor wordt de transformeerende affinor van deze twee stelsels genoemd.

Opgave. Laat zien, dat

$$(18.2) \quad T_{\lambda}^k = e_{1'}^k e_{\lambda}^{1'} + \dots + e_{n'}^k e_{\lambda}^{n'}$$

en bewijs, dat de intermediaire kentallen van T_{λ}^k , dus de $T_{\lambda}^{k'}$ ~~zijn~~ of ~~zijn~~ al naar gelang k' en λ door twee corresponderende of twee niet corresponderende indices uit de rijen der vaste indices $1', \dots, n'$ en $1, \dots, n$ vervangen worden.

Overschuiving. De overschuiving $v^{\lambda} w_{\lambda}$ van twee vectoren hebben wij reeds behandeld. Men kan bij affinoren van hogere valentie sommeeren over een of meer paren van indices (waarvan er steeds één boven en één onder moet staan) b.v.

$$(18.3) \quad P_{\lambda\mu}^{\dots k} R^{\lambda\sigma\rho} = S_{\mu}^{\dots k\sigma\rho}$$

of

$$(18.4) \quad P_{\lambda\mu}^{\dots k} R^{\lambda\mu\rho} = T^{k\rho}.$$

Opgave. Bewijs, dat $S_{\mu}^{\dots k\sigma\rho}$ en $T^{k\rho}$ affinoren zijn.

Opgave. Bewijs, dat sommeeren over twee gelijkstandige indices geen affinor oplevert; b.v. $\sum_{\lambda} v_{\lambda}^k P_{\lambda}^k$.

Isomeer Het vormen van een isomeer heeft plaats doordat de indices van plaats verwisselen, b.v.

$$(19.1) \quad R_{\dots \mu}^{k\lambda \cdot \sigma} = P_{\dots \mu}^{k \cdot \sigma \lambda} \quad \text{en omgekeerd.}$$

Hierin is R een isomeer van P . Deze bewerking komt overeen met het verwisselen van factoren, b.v.

$$(19.2) \quad u^k v^\lambda w_\mu x^\sigma \text{ en } u^k w_\mu x^\sigma v^\lambda$$

Opgave. Geldt de vergelijking

$$(19.3) \quad a v_{\lambda \sigma} + b v_{\sigma \lambda} = 0$$

t.o.v. een ~~of~~ ander coördinatenstelsel, dat geldt zij algemeen.

Is $v_{\lambda \sigma} \neq 0$, dan moet $a = \pm b$.

Vouwen. Onder vouwen verstaan wij het sommeren over een of meer paren van ongelijkstandige indices, b.v.

$$(19.4) \quad P_{\cdot \lambda}^{k \cdot \lambda} = S^k$$

Een overschuiving ontstaat dus door het proces van het vouwen toe te passen op een algemeen product.

Opgave. Laat zien, dat S^k een affinor is.

Mengen. Het mengen over p gelijkstandige indices heeft volgens het volgende voorschrift plaats. Neem de som van de $p!$ isomeeren, die ontstaan door permutatie van deze indices en deel door $p!$ (dus neem het gemiddelde). Het mengen wordt aangegeven door 2 ronde haakjes om de indices, waarover gemengd wordt. B.v.

$$(19.5) \quad P_{\lambda}^{\cdot k(\rho \sigma)} = \frac{1}{2} (P_{\lambda}^{\cdot k \rho \sigma} + P_{\lambda}^{\cdot k \sigma \rho})$$

$$(19.6) \quad P_{\lambda}^{\cdot (k \rho \sigma)} = \frac{1}{6} (P_{\lambda}^{\cdot k \rho \sigma} + P_{\lambda}^{\cdot k \sigma \rho} + P_{\lambda}^{\cdot \rho \sigma k} + P_{\lambda}^{\cdot \rho k \sigma} + P_{\lambda}^{\cdot \sigma k \rho} + P_{\lambda}^{\cdot \sigma \rho k})$$

De affinor

$$(19.7) \quad R_{\lambda}^{\cdot k \rho \sigma} = P_{\lambda}^{\cdot (k \rho \sigma)}$$

is een affinor, die bij menging niet meer verandert. Verwisselt men twee der indices $k \rho \sigma$, dan houdt men denzelfden affinor.

Men zegt dan, dat $R_{\lambda}^{k\rho\sigma}$ symmetrisch is in de indices $k\rho\sigma$.

$$(20.1) \quad R_{\lambda}^{k\rho\sigma} = R_{\lambda}^{\rho k\sigma} = R_{\lambda}^{\rho\sigma k}.$$

Alterneeren. Wil men een affinor alterneeren over ρ gelijkstandige indices, dan vormt men uitgaande van dezen affinor de $\frac{1}{2}\rho!$ even en de $\frac{1}{2}\rho!$ oneven permutaties. (Een (oneven) permutatie wordt verkregen door een (on)even aantal verwisselingen van twee indices). Men neemt nu de som van de even verminderd met de som van de oneven permutaties en deelt alles door $\rho!$. Het alterneeren wordt aangegeven door twee vierkante $\parallel$ haken om de indices, waarover gealterneerd wordt. B.v.

$$(20.2) \quad P_{\mu}^{k[\lambda\sigma]} = \frac{1}{2} (P_{\mu}^{k\lambda\sigma} - P_{\mu}^{k\sigma\lambda})$$

$$(20.3) \quad S_{\mu}^{k\lambda\sigma} = P_{\mu}^{[k\lambda\sigma]} = \frac{1}{6} (P_{\mu}^{k\lambda\sigma} + P_{\mu}^{\lambda\sigma k} + P_{\mu}^{\sigma k\lambda} - P_{\mu}^{k\sigma\lambda} - P_{\mu}^{\sigma\lambda k} - P_{\mu}^{\lambda k\sigma}).$$

Alterneert men $S_{\mu}^{k\lambda\sigma}$ over twee of meer contravariante indices, dan krijgt men weer denzelfden affinor. Verwisselt men twee contravariante indices, dan krijgt men een nieuwen affinor, die gelijk is aan den ouden op het teeken na

$$(20.4) \quad S_{\mu}^{k\lambda\sigma} = - S_{\mu}^{k\sigma\lambda}.$$

Is een grootheid symmetrisch in de indices waarover gealterneerd wordt, dan krijgt men 0 als uitkomst. Is $\rho^{[k\lambda]} = \rho^{\lambda k}$, dan is $\rho^{[k\lambda]} = 0$. Affinoren, die alleen hun teeken veranderen bij verwisseling van twee indices heeten alterneerend in de betrokken indices.

~~Tensoren ρ -vectoren~~ Affinoren, welke symmetrisch zijn in alle indices, noemt men tensoren.

Affinoren van de valentie ρ , welke alterneerend zijn in alle indices, noemt men ρ -vectoren. Een tensor heeft dus de eigenschap

$$(20.5) \quad v_{\lambda_1 \dots \lambda_{\rho}} = v_{(\lambda_1 \dots \lambda_{\rho})}$$

terwijl voor een ρ -vector geldt:

$$(20.6) \quad w_{\lambda_1 \dots \lambda_{\rho}} = w_{[\lambda_1 \dots \lambda_{\rho}]}$$

Een affinor van de valentie p heeft n^p kentallen. Tensoren van de valentie p hebben ook n^p kentallen, doch deze zijn niet onafhankelijk. Er zijn slechts

$$(21.1) \quad \frac{n(n+1) \dots (n+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} = \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$$

onafhankelijke kentallen. Ook de n^p kentallen van een p -vector zijn niet onafhankelijk. Hier zijn er slechts

$$(21.2) \quad \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$$

onafhankelijk. Alle kentallen van een p -vector, waar ⁱⁿ twee gelijke indices ~~///~~ voorkomen zijn nul. Hieruit volgt, dat, als er nog kentallen zullen zijn, die niet gelijk nul zijn, $p \leq n$ moet zijn.

p -Vectoren bestaan dus alleen voor $p \leq n$.

Een n -vector heeft $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$ kental. Toch is het geen scalar, want dit kental verandert bij coördinatentransformaties. Wij komen hier nog op terug.

Wanneer wij ons beperken tot transformaties, die den oorsprong invariant laten, dan is ^(Covarianten) ~~van de tensor~~ $\mathcal{W}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ ~~de volgende~~

$$(21.3) \quad \mathcal{W}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} x^{\lambda_1} x^{\lambda_2} \dots x^{\lambda_p} = 1 \quad (x_{n+1})$$

in de puntcoördinaten x^{λ}

een invariante uitdrukking, die een oppervlak van den graad p voorstelt. Zoals men gemakkelijk inziet, is ^(onafhankelijk) de tensor door ~~het de~~ oppervlak bepaald. ~~In de relativiteitstheorie komt b.v. het oppervlak~~

$$(21.4) \quad g_{\kappa\lambda} x^{\kappa} x^{\lambda} = 1$$

~~F Laat men den oorsprong mee~~
~~verankeren dan is de hyperbolische~~
 ~~x_{n+1} slechts tot op een na~~
~~aanwijzing bepaald.~~

De symmetrie is een van het coördinatenstelsel onafhankelijke eigenschap, want voor een tensor $v_{\kappa\lambda}$ geldt

$$(21.5) \quad v_{\kappa'\lambda'} - v_{\lambda'\kappa'} = A_{\kappa'\lambda'}^{k\lambda} (v_{\kappa\lambda} - v_{\lambda\kappa}) = 0.$$

Opgeve. Bewijs dat het alterneerend zijn eveneens een van het coördinatenstelsel onafhankelijke eigenschap is. ^(bij puntcoördinaten)

^(Covarianten) ~~Tensoren van diff. graad 2 valentie 2 bepaald door een $\mathcal{E}_2$ bepaald door een $\mathcal{E}_2$~~
~~bepaald door een tweedegraadsoppervlak~~

Bivectoren

Men verkrijgt een bijzonder soort bivector, door het alterneerend product te nemen van twee vectoren v^{κ} en v^{λ} .

$$(22.1) \quad p^{KL} = v^{[K} w^{L]} = \frac{1}{2} (v^K w^L - v^L w^K)$$

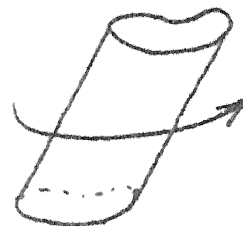
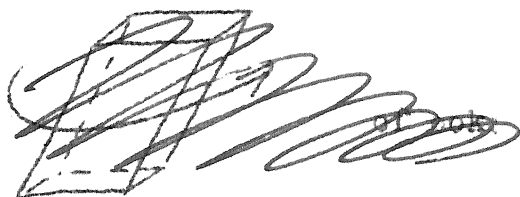
zijn, en dit is een vergelijking van den eersten graad in α , die

(Het oppervlak van een)
~~Het oppervlak van de buis is bepaald niet door de vorm van de doorsnede niet in de gewone figuur maar wilgehoort menigvuldig aan zichzelf vervormd worden.~~

23.

Re. dus één wortel heeft. Is deze wortel gevonden, dan is $F^{k\lambda}$ door (22.5) bepaald. (Een enkelvoudige bivector bepaalt niet de vectoren v^k en v_l^k , maar alleen het vlak der vectoren, en een zeker daarin afgegrensd oppervlak met een draaizin.

Op dezelfde manier kan men uit twee covariante vectoren een enkelvoudigen covarianten bivector $v_\lambda v_k$ vormen. Meetkundig is dit een buis met draaizin, dus voor $n = 3$:



Door den bivector zijn v_λ en v_k echter niet bepaald. De bivector geeft alleen een (n-2)-richting (de richting van de beschrijvende), die alle ξ_{n-2} 's zijn (voor $n=3$ dus rechte lijnen) een zekere grootte van doorsnede (b.v. vast te leggen door het oppervlak der doorsnede met een van de coördinaten - ξ_2 's) en een draaizin om de buis heen (dat wil dus zeggen in een vlak, dat de buis op niet bijzondere wijze snijdt). De buis loopt naar beide zijden ∞ ver door, de afsluitingen in de figuur dienen dus alleen

om een perspectiefisch beeld te krijgen. *Alles wat men niet onafhankelijke bivectoren geeft is, geld ook van covariante. In $\mathcal{E}_3$ laat men een niet onafhankelijke covariante bivector op een niet ∞ manieren in twee vlakken opstellen onafhankelijke.*

In de 4-dimensionale ruimte kan een trivector steeds ontstaan door het product van drie vectoren te alterneren

$$(23.1) \quad F^{k\lambda\mu} = v^k v^\lambda v^\mu$$

De vectoren moeten lineair onafhankelijk zijn, anders ontstaat nul. In 3 afmetingen heeft een trivector maar één kental, n.l. $v^k v^\lambda v^\mu$. In 4 afmetingen stelt een trivector een stuk van een $\mathcal{E}$ voor, dat een bepaald inhoud heeft, een onbepaalde begrenzing en een schroefzin. De schroefzin verandert als men twee vectoren in het product verwisselt. *Voor $n > 4$ bestaan ook niet onafhankelijke trivectoren.*

Quadrivector.

In $\mathcal{E}_3$ bestaan geen quadrivectoren. In de 4-dimensionale ruimte ontstaat een quadrivector uit vier vectoren

$$(23.2) \quad v^k v^\lambda v^\mu v^\nu = P^{k\lambda\mu\nu}$$

24.

$$\begin{aligned}
 P^{1'2'3'4'} &= A_{[K\lambda\mu\nu]}^{1'2'3'4'} P^{K\lambda\mu\nu} = \\
 (24.1) \quad &= (4! A_{[1234]}^{1'2'3'4'}) P^{1234} = \\
 &= \Delta P^{1234} \quad ; \quad \Delta = \det(A_{\lambda}^{K'})
 \end{aligned}$$

(24.2) $\begin{pmatrix} \mathbf{p}' \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \end{pmatrix}$ (indefinite transformation)

Opgave 2 Bewijs, dat het kental van een covariante n -vector zich transformeert als een dichtheid van het gewicht $+1$ van een covariante n -vector in $\mathbb{R}_n$ als een dichtheid van het gewicht $+1$, hetgeen opzeggende onze bewezen wordt.

1) (gothische k) is hier een exponent.

2) Dichtheden krijgen altijd een gothischen kernletter.

Het is gebruikelijk om den kenmerk van die determinant ~~aan~~ ^{gevoegd} te worden, die ~~gevoegd~~ ^{gevoegd} te worden. Ten overvloede van de later te definiëren Weylsche determinanten nemen wij even den kenmerk n .

25.
zich dus net als een affinor alleen komt, er een factor Δ^{-1} bij, d.w.z.

$$\mathcal{P}_{\lambda}^{\alpha} = \Delta^{-1} A_{\alpha}^{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda}^{\alpha}$$

Affinoren van de valentie 2

De matrix van den affinor $p_{\kappa\lambda}$ is

$$(25.1) \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & & & p_{nn} \end{vmatrix}$$

Men zegt dat deze matrix den rang r heeft, wanneer alle determinanten met $(r+1)$ of meer rijen en kolommen nul zijn, maar niet alle determinanten ^{met} van r rijen en kolommen. De rang van de matrix wordt tevens de rang van den affinor genoemd. Is de rang r , dan is de affinor

(25.2)

$$p_{[\lambda_1, [\dots, p_{\lambda_s}] \dots] \kappa_s]}$$

$\neq$ op niet verdwijnende getalfactoren na

(hier wordt apart over $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ en over $\kappa_1, \dots, \kappa_s$ gealterneerd) gelijk nul voor $s > r$ en $\neq 0$ voor $s = r$, want de ken-tallen zijn juist de onderdeterminanten met s rijen en kolommen. Uit deze van het assenstelsel onafhankelijke formulering volgt, dat de rang een van de keuze der coördinaten onafhankelijke eigenschap van een affinor uitdrukt. Voor affinoren met twee contravariante indices of met één contravarianten en één covarianten index gelden precies dezelfde eigenschappen. Is de rang $r < n$, dan noemen wij den affinor gedegeneraard. Is de rang $r = n$, dan wil dat zeggen:

(25.3)

$$\text{Det. } (p_{\lambda\kappa}) \neq 0$$

Al. Een ^{contravariante} affinor $p_{\lambda\kappa}$ voegt aan elken contravarianten vector een covarianten vector toe volgens

(25.4)

$$w_{\lambda} = p_{\lambda\kappa} v^{\kappa}$$

Alleen wanneer de rang $r = n$ is, is deze toevoeging éénéénduidig, d.w.z. behoort bij elken covarianten vector een contravariante. Dan bestaat $p^{\kappa\lambda}$, de omkeering van $p_{\kappa\lambda}$, waarvoor geldt

een contravariante affinor

$$(26.1) \quad v^k = \bar{p}^{k\lambda} w_\lambda$$

Uit (25.4) en (26.1) volgt dat

$$(26.2) \quad v^k = \bar{p}^{k\lambda} p_{\lambda\rho} v^\rho$$

voor elken willekeurigen vector v^k , zoodat

$$(26.3) \quad A_\lambda^k = \bar{p}^{k\rho} p_{\rho\lambda}$$

onderaan 2.)

Meetkundige beteekenis van tensoren. ~~Opmerken wij ons tot trans-~~
~~formaties, die den oorsprong invariant laten, dan stelt de tensor~~
 $p_{\lambda k}$ (wij onderstellen dus nu $p_{k\lambda} = p_{\lambda k}$) ~~een~~ *hyper* ~~quadratische oppervlak~~
 voor ~~de dra~~ ~~relatie met het hyperoppervlak~~

$$(26.4) \quad p_{\lambda k} x^\lambda x^k = 1.$$

hyper

~~relatie kunnen maken~~ $\frac{1}{2} \text{ Als } (p_{\lambda k}) \neq 0$, dan is dit *hyper* ~~hyperoppervlak~~ met *gedegeneerd*.

Aan elken vector (punt) wordt nu een covariante vector toege-
 voegd, *hyper* die voorgesteld wordt door het *hyper* poedvlak van genoemd punt.
 Het poedvlak van een punt v^k heeft n.l. de vergelijking

$$(26.5) \quad p_{\lambda k} v^k x^\lambda = 1.$$

26a

Schrijft men het oppervlak in hypervlakcoördinaten, dan luidt de
 vergelijking

$$(26.6) \quad \bar{p}^{k\lambda} u_k u_\lambda = 1.$$

II ¹² H. Meten van lengten en hoeken

In een $\mathcal{E}_n$ kan men een maat invoeren, door in elke richting
 een willekeurige lengte als eenheid te nemen. Zet men deze leng-
 ten in hun bijbehorende richting vanuit één punt uit, dan vormen
 de eindpunten van al die maatvectoren een *hyper* oppervlak, het *hyper* maat-op-
 pervlak. Elk lijnstuk is dan te meten, omdat men in een $\mathcal{E}_n$ wel
 lengten van *evenwijdige* lijnstukken kan vergelijken.

Een van de eenvoudigste maatoppervlakken is nu een *hyper* ~~quadra-~~
 tisch *hyper* oppervlak. Een $\mathcal{E}_n$ met een dergelijk maatoppervlak heeft R_n .
 Neemt men het middelpunt in O , dan heeft dit oppervlak de ver-
 gelijking

hyper

men de twee velden te l. v. d. Is deze veldens niet meer dan beiden de velden onderling loodrecht.

$$\text{Det}(g_{\alpha\beta}) \neq 0.$$

Men zegt dat de metriek in het +- veld - gebied ligt. Is de invariant met dan ~~met~~ licht de niet ~~op~~ op den nulkegel, d. i. de l. v. d. met ~~met~~ $g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$. l. v. d. l. v. d. met een ~~met~~ met.

(27.1)

$$g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 1;$$

De tensor $g_{\alpha\beta}$ wordt de fundamentealtensor genoemd. Een algemeene $\mathbb{E}_3$ met een fundamentealtensor $g_{\alpha\beta}$ geeft onze gewone ruimte. De uitdrukking $g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$ is een invariant.

(27.2)

$$g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$$

is een invariant, die aan den vector v^α is toegevoegd. Deze scalar kan zoowel positief als negatief zijn. Is $g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = +1$ of -1 .

Is een tensor $p_{\alpha\beta}$ gegeven, dan kan het assenstelsel steeds zoo gekozen worden, dat

$$(27.3) \quad p_{11} = \pm 1, \quad p_{22} = \pm 1, \quad \dots, \quad p_{nn} = \pm 1,$$

terwijl

$$(27.4) \quad p_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{voor } \alpha \neq \beta.$$

De verzameling van alle tekens --- ... +++ ... noemt men de signature. Is het aantal --- tekens even dan heet de signature positief, anders negatief.

Een zeker aantal van de $p_{\alpha\beta}$'s zal $+1$ zijn. Dit aantal, dat de index van $p_{\alpha\beta}$ genoemd wordt, is invariant bij reële assentransformaties, d. i. z., neemt men een ander assenstelsel, waarvoor (27.3) en (27.4) geldt, dan is dit aantal gelijk gebleven. De assenstelsels, waarvoor $g_{\alpha\beta}$ een dergelijken vorm krijgt, noemen wij orthogonale assenstelsels. De loopende indices op deze stelsels zullen wij aanduiden met $k, i, \dots, m; k', i', \dots, m'$; l. v. d. de vaste met $\lambda, \mu, \dots, n; \lambda', \mu', \dots, n'$. Heeft de fundamentealtensor den index n , dan kan men zorgen, dat

$$(27.5) \quad g_{11} = g_{22} = \dots = g_{nn} = \pm 1; \quad g_{(n+1)(n+1)} = \dots = g_{nn} = +1.$$

De bij v^α behorende invariant is dan

$$(27.6) \quad -v^1 v^1 - \dots - v^n v^n + v^{n+1} v^{n+1} + \dots + v^m v^m$$

Is de index gelijk aan n , dan is de vorm (27.5) positief definitief; is de index nul, dan is (27.5) negatief definitief. In de andere gevallen is de indefinitief en kan het teken zoowel positief als negatief zijn. Bij een definitief fundamentealtensor is de nulkegel imaginaar.

En $\mathbb{E}_3$ met een definitief fundamentealtensor geeft onze gewone ruimte. Als de covariante meetvectoren van een orthogonaal

Is het aantal meetvectoren even of oneven?

$$(29.1) \quad \cos \varphi = \frac{\pm g_{\kappa\lambda} v^\kappa w^\lambda}{|V(g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu)(g_{\rho\sigma} w^\rho w^\sigma)|}.$$

~~Deze hoek φ kan ook imaginair zijn. De uitdrukking wordt betekenisloos indien één der vectoren op den nulkegel ligt. In dat geval noemen we de twee vectoren orthogonaal indien $g_{\kappa\lambda} v^\kappa w^\lambda$ nul is.~~

De fundamentealtensor doet een éénéénduidig verband ontstaan tusschen co- en contravariante vectoren

$$(29.2) \quad \begin{aligned} v^\kappa g_{\kappa\lambda} &= w_\lambda \\ v^\kappa &= \bar{g}^{\kappa\lambda} w_\lambda. \end{aligned}$$

De covariante vector w_λ is bepaald door het poolvlak van het punt v^κ t.o.v. het tweede graadsoppervlak

$$(29.3) \quad g_{\kappa\lambda} x^\kappa x^\lambda = 1.$$

Twee vectoren v^κ en w_λ , die verbonden zijn door (29.2), stellen dus eigenlijk op verschillende wijze hetzelfde geometrische object voor. Wij identificeeren ze dan ook en ~~zullen ze denzelfden kern-~~ letter ^{te} geven

(brengen dit tot éénig don)

$$(29.4) \quad v_\lambda = g_{\kappa\lambda} v^\kappa.$$

Deze bewerking noemen wij het op- en neerhalen van indices. Ook bij affinoren kan men indices omhoog en omlaag halen. Doen wij dit voor $\bar{g}^{\kappa\lambda}$, dan krijgen wij $g_{\kappa\lambda}$; wij zullen dan ook voortaan $g^{\kappa\lambda}$ inplaats van $\bar{g}^{\kappa\lambda}$ schrijven. *Van orthogonaal om dimensiedel getal*

→ Uit de orthogonaliteitsdefinitie volgt, dat een vector w^κ loodrecht staat op een vector v^κ , als hij in de $(n-1)$ -richting van v^κ ligt. ~~De vectoren, waarvoor v^κ een vector op den nulkegel is.~~

$$(29.5) \quad g_{\kappa\lambda} v^\kappa v^\lambda = 0.$$

~~De vectoren v^κ en v^λ en dezelfde vector v^κ dus~~

~~staan loodrecht op zichzelf. Het zijn dus die vectoren, die op den nulkegel liggen. De bijbehorende contravariante vector v^κ raakt aan den nulkegel en wel raakt v^κ langs den straal die v^κ bevat.~~

$$v^\mu = \begin{cases} \pm v^\mu & \mu = 1, \dots, m \\ \pm v^\mu & \mu = m+1, \dots, n \end{cases}$$

van ϵ^A ligt. De vectoren, waarvoor

$$(32.1) \quad g_{KA} \epsilon^K \epsilon^A = 0$$

staan loodrecht op zichzelf, het zijn dus die vectoren, die op den nulkegel liggen. De bijbehorende contravariante vectoren raken aan den nulkegel en wel raakt ϵ^A langs den straal die ϵ_A bevat.

Orthogonale assenstelsels.

Wij hebben een assenstelsel orthogonaal genoemd wanneer de fundamenteeltensor op dit stelsel de volgende kentallen heeft

$$(32.2) \quad g_{hi} = 0 \quad h \neq i; \quad g_{ii} = \pm 1.$$

Opgave Bewijs dat (32.2) noodzakelijk en voldoende is opdat de maatvectoren van het stelsel onderling orthogonaal zullen zijn en de lengte of duur van deze vectoren 1 zal zijn.

In de relativiteitstheorie hebben wij

$$(32.3) \quad g_{11} = -1 \quad g_{22} = -1 \quad g_{33} = -1 \quad g_{44} = +1 \quad g_{hi} = 0 \quad (h \neq i)$$

waaruit volgt

$$(32.4) \quad g^{11} = -1 \quad g^{22} = -1 \quad g^{33} = -1 \quad g^{44} = +1 \quad g^{hi} = 0 \quad (h \neq i).$$

De maatvectoren ϵ^1 , ϵ^2 en ϵ^3 hebben de lengte 1, terwijl de duur van ϵ^4 gelijk 1 is. Uit (32.3) en (32.4) volgt

$$(32.5) \quad \epsilon^1 = \epsilon_1; \quad \epsilon^2 = -\epsilon_2; \quad \epsilon^3 = -\epsilon_3; \quad \epsilon^4 = \epsilon_4.$$

$$(32.6) \quad \epsilon^1 = \epsilon_1; \quad \epsilon^2 = -\epsilon_2; \quad \epsilon^3 = -\epsilon_3; \quad \epsilon^4 = \epsilon_4.$$

en dus ook

$$(32.7) \quad \epsilon^K = \epsilon^K; \quad \epsilon^1 = -\epsilon^1; \quad \epsilon^2 = -\epsilon^2; \quad \epsilon^3 = -\epsilon^3.$$

De uitdrukking

$$(32.8) \quad g_{KA} \epsilon^K \epsilon^A = -\epsilon^1 \epsilon_1 - \epsilon^2 \epsilon_2 - \epsilon^3 \epsilon_3 + \epsilon^4 \epsilon_4$$

komt overeen met het scalaire product van twee vectoren in de

gewone ruimte. Uit de 3-dimensionale ruimte kennen wij ook nog het vectorische product van twee vectoren dat zelf weer een vector is. Dit kennen wij in de 4-dimensionale ruimte niet. In de 3-dimensionale ruimte ontstaat het vectorische product op de volgende wijze uit den bivector

$$(33.1) \quad \epsilon^{[k} u^{\lambda]}.$$

In R_3 bestaat n.l. een trivector

$$(33.2) \quad \gamma_{k\lambda\mu} = \gamma_{[k\lambda]\mu} \quad ; \quad \gamma_{123} = +1,$$

die meetkundig een volume met schreefsin voorstelt. Uit $\epsilon^{[k} u^{\lambda]}$ kan men nu met behulp van $\gamma^{\lambda\mu\lambda}$ een vector vormen:

$$(33.3) \quad u^k = - \epsilon^{[k} u^{\lambda]} \gamma_{\mu\lambda\rho} g^{\mu k}$$

dus voor een orthogonaal stelsel

$$(33.4) \quad u^1 = - (\epsilon^2 u^3 - \epsilon^3 u^2) \gamma_{123} g^{11} = \epsilon^2 u^3 - \epsilon^3 u^2.$$

In R_4 gaat dit natuurlijk niet, wel zou men uit het alterneerende product van drie vectoren met behulp van $\gamma_{k\lambda\mu\nu}$ een vector kunnen vormen.

In de gewone vectoranalyse kent men geen co- en contravariante kentallen en ook geen kentallen met twee indices voor bivectoren. Om dus van de gewone vectoranalyse op Ricci-rekening over te gaan moet men een vertaalschema hebben. We geven dit hier voor onze gewone R_3 maar met $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -1$ zooals voor de relativiteitstheorie nodig is. Dan noemen we ter onderscheiding de kentallen van een vector uit de vectoranalyse a_x, a_y, a_z . Deze vector kan in de Ricci-rekening zoowel als vector als als bivector optreden. Het vertaalschema luidt:

$$a_x = a^1 = -a_1 = a^{23} = -a^{32} = a_{23} = -a_{32} ; \text{cycl.}$$

Voor het scalaire product komt dus ¹⁾

$$\rho = \vec{a} \cdot \vec{b} = -a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

en voor het vectorische product

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$$c_K = a_y b_z - a_z b_y; \text{ cycl}$$

$$\rho = a^p b_p = a^K b_K$$

$$\text{of ook: } \rho = -\frac{1}{2} a^{pq} b_{pq} = -\frac{1}{2} a^{KL} b_{KL}$$

$$c^{pq} = 2a^{[p} b^{q]}; c^{KL} = 2a^{[K} b^{L]}$$

$$c_{pq} = 2a_{[p} b_{q]}; c_{KL} = 2a_{[K} b_{L]}$$

$$\text{of ook: } c^p = a_q b^{pq}; c^K = a_\lambda b^{K\lambda}$$

$$c_q = a^p b_{pq}; c_\lambda = a^K b_{K\lambda}$$

$$\text{of ook: } c^p = a^{pq} b_q; c^K = a^{KL} b_L$$

$$c_q = a_{qp} b^p; c_\lambda = a_{\lambda K} b^K$$

Lorentztransformaties

Er zijn meerdere assenstelsels, waarvoor (32.3) geldt.

Men kan nu die coördinatentransformaties beschouwen, die de eigenschap hebben, dat voor het nieuwe stelsel ook (32.3) geldt

Voor beide stelsels van maatvectoren moet dan gelden

$$(34.1) \quad g^{KL} = \frac{\partial x^K}{\partial x'^L} \frac{\partial x^L}{\partial x'^M} g^{LM} = \frac{\partial x^K}{\partial x'^L} \frac{\partial x^L}{\partial x'^M} g^{LM}$$

Zij nu

$$(34.2) \quad x'^K = P^K_\lambda x^\lambda \quad K = 1 \text{ tot } 4, \lambda = 1 \text{ tot } 4$$

de transformatie, die de maatvectoren van het ene assenstelsel

in die van het andere overvoert, dan volgt uit (34.1)

$$(34.3) \quad P^K_\rho P^L_\sigma g^{\rho\sigma} = g^{KL}$$

d.w.z. de transformatie P^K_λ laast den fundamenteeltensor en dus het maatoppervlak invariant. Invariant blijven dus ook alle lengten en hoeken. Zulke transformaties heeten draaiingen en spiegelingen en in het speciale geval van de R_4 met fundamenteeltensor

1) Wij laten hier de indices p, q, r de waarden 1, 2, 3 doorlopen ten einde later de indices $\lambda, \dots, \mu$ te kunnen reserveren voor de waarden 1, 2, 3, 4.

met index 1 Lorentztransformaties. In het bijzonder beschouwen we alleen die Lorentztransformaties, die de twee binnengedeelten van den nulkegel, die alleen in den top samenhangen niet verwisselen (fysisch: verleden en toekomst niet verwisselen). Wij geven hier twee voorbeelden van Lorentztransformaties. Ten eerste de transformatie van maatvectoren

$$\begin{aligned}
 \vec{t}' &= \vec{t}_1 \cos \varphi + \vec{t}_2 \sin \varphi & \vec{t}' &= \vec{t}_1 \cos \varphi + \vec{t}_2 \sin \varphi \\
 \vec{t}_2' &= -\vec{t}_1 \sin \varphi + \vec{t}_2 \cos \varphi & \vec{t}' &= -\vec{t}_1 \sin \varphi + \vec{t}_2 \cos \varphi \\
 \vec{t}_3' &= \vec{t}_3 & \vec{t}' &= \vec{t}_3 \\
 \vec{t}_4' &= \vec{t}_4
 \end{aligned}
 \quad (35.1)$$

met de bijbehorende coördinatentransformatie 1)

$$\begin{aligned}
 x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi & x' t' y' t' &= (x \cos \varphi + y \sin \varphi)(t \cos \varphi + t' \sin \varphi) \\
 y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi & &+ (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)(-t \sin \varphi + t' \cos \varphi) \\
 x' &= x & x_1 &= x \vec{t}_1 + y \vec{t}_2 + x \vec{t}_3 + ct \vec{t}_4 \\
 ct' &= ct & &= x' \vec{t}_1 + y' \vec{t}_2 + x' \vec{t}_3 + ct' \vec{t}_4
 \end{aligned}
 \quad (35.2)$$

die een gewone draaiing voorstelt in het 1, 2 -vlak waarbij de 3-as en de 4-as in rust blijven. Ten tweede de transformatie

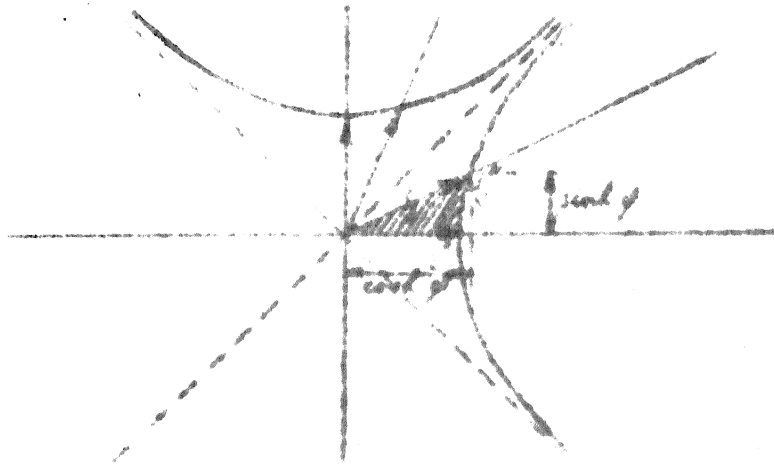
$$\begin{aligned}
 \vec{t}' &= \vec{t}_1 \cosh \varphi + \vec{t}_4 \sinh \varphi & \vec{t}' &= \vec{t}_1 \cosh \varphi - \vec{t}_4 \sinh \varphi \\
 \vec{t}_2' &= \vec{t}_2 & \vec{t}' &= \vec{t}_2 \\
 \vec{t}_3' &= \vec{t}_3 & \vec{t}' &= \vec{t}_3 \\
 \vec{t}_4' &= \vec{t}_1 \sinh \varphi + \vec{t}_4 \cosh \varphi & \vec{t}' &= -\vec{t}_1 \sinh \varphi + \vec{t}_4 \cosh \varphi
 \end{aligned}
 \quad (35.3)$$

waarbij met de bijbehorende coördinatentransformatie

$$\begin{aligned}
 x' &= x \cosh \varphi - ct \sinh \varphi \\
 y' &= y \\
 x' &= x \\
 ct' &= -x \sinh \varphi + ct \cosh \varphi
 \end{aligned}
 \quad (35.4)$$

1) We schrijven hier nu eens x, y, z, ct voor x^1, x^2, x^3, x^4 en x', y', z', ct' voor x'^1, x'^2, x'^3, x'^4 zooals dikwijls gebruikelijk is

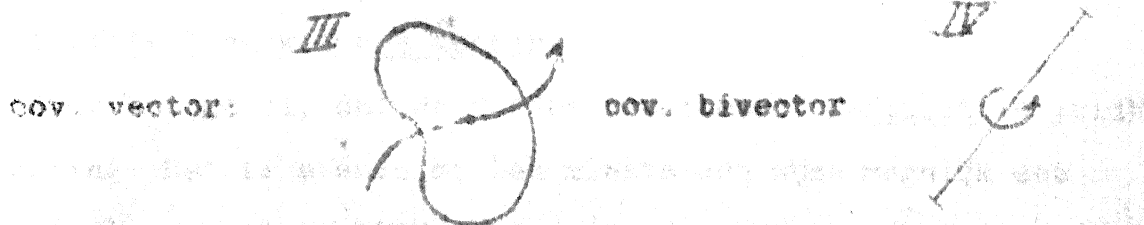
die een Lorentztransformatie in het $1, 4$ -vlak voorstelt, waarbij de x -as en de t -as in rust blijven



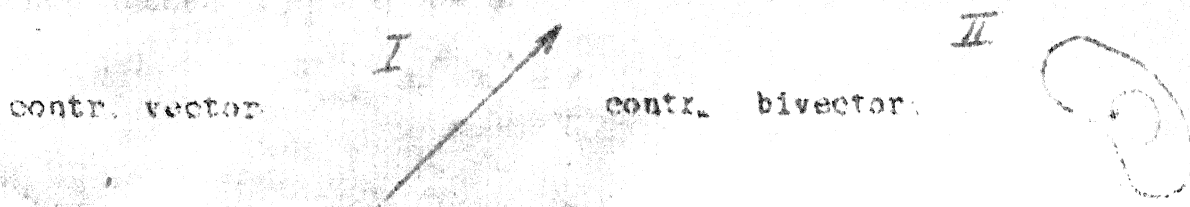
In de figuur, die deze transformatie voorstelt, zijn de hyperbolen $x^2 - c^2 t^2 = 1$ de meetkundige plaatsen der uiteinden der vectoren in het $1, 4$ -vlak met lengte 1 en met duur 1 . De nieuwe meetvectoren hebben dus ook weer de eenheid van lengte resp. duur, zij zijn bovendien ook weer onderling loodrecht (d.w.z. zij hebben toegevoegde richtingen t.o.v. de hyperbolen). Het oppervlak van het gearceerde deel van de figuur is $\frac{1}{2} \pi$. De rechte lijnen zijn de doorsneden van het $1, 4$ -vlak met den nulkegel. Een Lorentztransformatie van het eenvoudige soort als in (35, 34) heet een speciale Lorentztransformatie.

Meetkundige voorstelling der grootheden na invoering van een maat.

Nemen wij eerst aan, dat slechts een volume-eenheid gegeven is, en nog geen fundamentealtensoren, zodat men al inhouden kan meten maar geen lengten. Dan kan men door inspissen van de volume-eenheid den covarianten vector en den covarianten bivector voor $n = 3$ voorstellen door de figuren



De contravariante grootheden blijven op dezelfde wijze voorgesteld:



Men vindt soms in boeken de namen:

- I polaire vector
- II axiale bivector
- III polaire bivector
- IV axiale vector

Wordt nu nog een schroefzin ingevoerd, dan kan men I met IV identificeren en II met III. Wordt inplaats van een schroefzin een fundamentealtensor ingevoerd, dan kan men I met III en II met IV identificeren. Bij invoering zoowel van een schroefzin als van een fundamentealtensor laten zich alle 4 de grootheden met elkaar identificeren en laten zich dus alle vectoren en alle bivectoren voorstellen door een pijl.

In vier afmetingen interesseert ons speciaal het geval, dat er een fundamentealtensor ingevoerd is en dus vanzelf ook een volume-eenheid. De eenvoudigste meetkundige voorstellingen zijn dan:

contra-
en covar.
vector:



enkelv.
contra-
en covar.
bivector:



contra-
en covar.
trivector:



Bij den trivector geeft de kromme lijn aan, dat een schroefzin gegeven is in eenig hypervlak, dat de richting van den trivector niet bevat en dus in ieder zoodanig hypervlak. Wordt ook nog een 4-dimensionale schroefzin ingevoerd, dan kan men A en C identificeren, zoodat alleen A en B als eenvoudigste meetkundige voorstellingen blijven. Vectoren en bivectoren laten zich in vier afmetingen nooit identificeren.

Hoofdassenstelling van een tensor.

Voor het geval, dat de fundamentealtensor definiet is geldt de stelling: Het is steeds op ten minste één wijze mogelijk een orthogonaal stelsel te vinden waarvoor de kentallen $T_{\mu\nu}$ de eigenschap hebben $T_{\mu\nu} = 0$ ($\mu \neq \nu$).

(341)

$$T_{\mu\lambda} x^\mu x^\lambda = 1$$

steelt een tweedegraadshyperoppervlak voor. Men moet nu de assen kiezen, dat het toegevoegde middellijnen zijn, zowel t.o.v. dit oppervlak als t.o.v. tweedegraadsoppervlak

$$(38.1) \quad g_{\kappa\lambda} x^{\kappa} x^{\lambda} = 1.$$

De richtingen van deze assen noemt men de hoofdasen van de tensor $T_{\lambda\kappa}$.

De hoofdasenstelling geldt niet voor niet-definieten fundamentealtensor

Hoofdbladenstelling van een bivector

Voor definieten fundamentealtensor geldt de stelling:

Het is steeds op ten minste één wijze mogelijk de bladen van een bivector (voor $n = 4$ ten hoogste twee) zoo te kiezen dat ze onderling loodrecht zijn.

De hoofdbladenstelling geldt niet voor niet-definieten fundamentealtensor

Infinitiesimale Lorentztransformaties

De lineaire transformatie P_{λ}^{κ} heet infinitiesimaal wanneer P_{λ}^{κ} slechts infinitesimaal verschilt van A_{λ}^{κ} :

$$(38.2) \quad P_{\lambda}^{\kappa} = A_{\lambda}^{\kappa} + \epsilon F_{\lambda}^{\kappa}, \quad \epsilon \text{ klein}$$

P_{λ}^{κ} is een Lorentztransformatie, indien $g^{\kappa\lambda}$ invariant is

$$(38.3) \quad (A_{\rho}^{\kappa} + \epsilon F_{\rho}^{\kappa})(A_{\sigma}^{\lambda} + \epsilon F_{\sigma}^{\lambda}) g^{\rho\sigma} = g^{\kappa\lambda}.$$

Daaruit volgt als n.e.v. voorwaarde

$$(38.4) \quad F^{\kappa\lambda} = -F^{\lambda\kappa}.$$

Bij iedere infinitesimale Lorentztransformatie behoort dus een bivector. Laat zich deze bivector in twee onderling loodrechte bladen ontbinden, dan laat de Lorentztransformatie elk van de vlakken dezer bladen invariant. Dit is echter niet altijd het geval omdat

de fundamentealtensor niet definit is.

Eindige Lorentztransformaties

Wij bewijzen de stelling

Iedere reële Lorentztransformatie die de beide delen van den nulkegel niet verwisselt en een 4-dimensionalen schroefzin niet verandert (d.w.z. determinant $\neq -1$ heeft), kan worden verkregen door een speciale Lorentztransformatie (blz. 36) gevolgd door een gewone draaiing in drie afmetingen, bij welke draaiing de richting loodrecht op die drie afmetingen invariant blijft.

Bewijs.

Neem binnen den nulkegel een 4-as aan en laat deze door de Lorentztransformatie overgaan in de as $4'$. Tengevolge van de onderstelling ligt deze as ook binnen den nulkegel en wil in hetzelfde gedeelte. Breng door de 4-as en $4'$ -as een vlak en snijdt dat met de ruimte L op 4 . Kies de $4'$ -as in deze snijlijn. Oefen dan eerst in het $4, 4'$ -vlak een speciale Lorentztransformatie uit, die de 4-as overvoert in de $4'$ -as en die de $4'$ -as brengt in een as, die wij $1''$ noemen. In de ruimte L op de $4'$ -as liggen nu de assen $1''$, 2 en 3 , maar ook de nieuwe assen $1'$, $2'$ en $3'$. Want deze zijn alle $\perp$ op de $4'$ -as. Er is dus in deze ruimte slechts een draaiing of draaiing met spiegeling nodig om de assen $1''$, 2 , 3 over te voeren in $1'$, $2'$, $3'$. Dit moet echter een zuivere draaiing zijn omdat de Lorentztransformatie volgens onderstelling den schroefzin invariant laat.

Invariante differentiatie van velden.

Aangezien

$$(39.1) \quad \frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} = A_{k'}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

transformeert zich de operator $\frac{\partial}{\partial x^k}$ als een covariante vector.

Wij schrijven kort ∂_k voor $\frac{\partial}{\partial x^k}$.

is dus $P^{\kappa\lambda}{}_{\mu\rho\sigma}$ een affinor, dan is ook

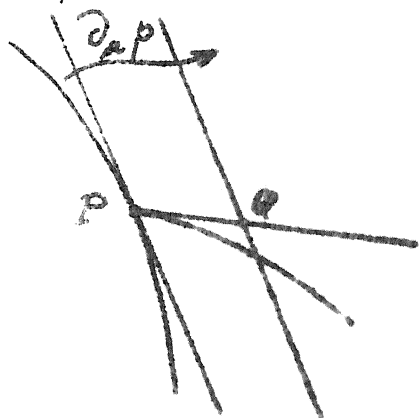
$$(40.1) \quad \partial_\nu P^{\kappa\lambda}{}_{\mu\rho\sigma}$$

een affinor.

Is β een scalarveld, dan heet

$$(40.2) \quad w_\mu = \partial_\mu \beta$$

de gradient van β . De hypervlakken van w_μ hebben overal de $(n-1)$ -richting van de hyperraakvlakken aan de hyperoppervlakken $\beta = c$, de equiscaleaire hyperoppervlakken van het veld.



Tekent men in P den covarianten vector $\partial_\mu \beta$ dan is de meetkundige betekenis van het tweede hypervlak van $\partial_\mu \beta$ de volgende. Beschrijft men van P uit een kromme, dan ondergaat β in P een zekere specifieke verandering. Indien het veld langs de raaklijn PQ voortging op

deze wijze te veranderen (wat het in het algemeen niet doet!), dan zou de toename van het veld over den weg van P naar Q juist 1 bedragen.

Is w_λ een vectorveld, dan heet de bivector

$$(40.3) \quad \partial_{[\mu} w_{\lambda]}$$

de rotatie van w_λ . Is de rotatie nul, dan bestaat er steeds tenminste één scalarveld β , zoodat

$$(40.4) \quad w_\lambda = \partial_\lambda \beta.$$

Deze stelling kan worden uitgebreid. Is $w_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ een β -vectorveld en is

$$(40.5) \quad \partial_{[\mu} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p]} = 0$$

dan bestaat er steeds tenminste één $(p-1)$ -vectorveld $w_{\lambda_2 \dots \lambda_p}$, zoodat

$$(40.6) \quad w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \partial_{[\lambda_1} w_{\lambda_2 \dots \lambda_p]}.$$

Is dus in het bijzonder $F_{\lambda\kappa}$ een bivector, en is

$$(41.1) \quad \partial_{[\mu} F_{\lambda\kappa]} = 0$$

dan bestaat er steeds een vectorveld φ_λ , zodat

$$(41.2) \quad F_{\mu\lambda} = 2\partial_{[\mu} \varphi_{\lambda]} \quad 1)$$

Is v^k een vectorveld, dan noemt men

$$(41.3) \quad \partial_\mu v^\mu = \partial_1 v^1 + \dots + \partial_n v^n$$

de divergentie van het veld v^k .

Tot nu is er bij de differentiatie nog geen sprake geweest van invoering van een fundamenteeltensor. Voeren we nu $g_{\lambda\kappa}$ in, dan zijn de kentallen van $g_{\lambda\kappa}$ constanten, dus

$$(41.4) \quad \partial_\mu g_{\lambda\kappa} = 0$$

en daaruit volgt:

Het op en neerhalen van indices en de differentiatie zijn twee processen wier volgorde men mag omkeeren,
dus b.v.

$$(41.5) \quad \partial_\mu v^\kappa = g^{\kappa\lambda} \partial_\mu v_\lambda.$$

In R_4 is in orthogonale kentallen

$$(41.6) \quad \begin{aligned} \partial_\mu v^\mu &= +\partial_1 v^1 + \partial_2 v^2 + \partial_3 v^3 + \partial_4 v^4 \\ &= -\partial_1 v_1 - \partial_2 v_2 - \partial_3 v_3 + \partial_4 v_4. \end{aligned}$$

Het vertaalschema voor R_3 is (vergelijk blz. 34)

1) De constante 2 is hier alleen ingevoerd om aan te sluiten aan de notaties der relativiteitstheorie.

Eenvoudige Relativiteitstheorie

De vergelijkingen van Maxwell-Lorentz in vacuum

Uitgangspunt zijn de vectoranalytische vergelijkingen van Maxwell-Lorentz in vacuum.

$$(42.1) \quad \begin{aligned} I & \quad \left\{ \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right. \\ II & \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \times \vec{B} &= -\frac{f}{c} \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= -\rho \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

die invariant zijn bij drie dimensionale draaiingen. De bedoeling is deze vergelijkingen 4-dimensionaal in de Ricci-notatie te schrijven. Schrijven wij de vergelijking (42.1) uit, dan krijgen wij

$$(42.2) \quad I \quad \left\{ \begin{aligned} \partial_x \xi_x - \partial_y \xi_y + \partial_z B_x &= 0 & \text{cycl. } x, y, z \\ -\partial_x B_x - \partial_y B_y - \partial_z B_z &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$II \quad \left\{ \begin{aligned} \partial_x \eta_x - \partial_y B_x + \partial_z B_y &= -\frac{f}{c} u_x & \text{cycl.} \\ \partial_x \eta_x + \partial_y \xi_y + \partial_z \xi_z &= +\rho \end{aligned} \right.$$

waarin ξ_x, ξ_y, ξ_z = componenten elektrische veldsterkte

B_x, B_y, B_z = " magnetische veldsterkte

u_x, u_y, u_z = " snelheid bewegende lading

ρ = elektrische ladingsdichtheid

c = lichtsnelheid

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z = \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\partial_4 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

Gaan we van de gewone vectoranalyse over tot Ricci-rekening in drie afmetingen met negatief definiten fundamenteeltensor, dan is het vertaalschema van blz. 39 te gebruiken (verg. ook blz. 32):

$$(42.3) \quad a_x = a^1 = -a_1 = a^{13} = a_{13} = -a^{31} = -a_{31}$$

waardoor de vergelijkingen overgaan in

$$(42.4) \quad \begin{aligned} I & \quad \left\{ \begin{aligned} -\partial_x \xi_3 + \partial_y \xi_1 + \partial_z B_{13} &= 0 & \text{cycl.} \\ -\partial_x B_{13} - \partial_y B_{31} - \partial_z B_{12} &= 0 \end{aligned} \right. \\ II & \quad \left\{ \begin{aligned} +\partial_x \xi^1 + \partial_y B^{11} + \partial_z B^{11} &= -\frac{f}{c} u^1 & \text{cycl.} \\ \partial_x \xi^1 + \partial_y \xi^2 + \partial_z \xi^3 &= +\rho \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

of geschreven met loopende indices

$$(43.1) \quad I \quad \begin{cases} -2\partial_p \xi_{qj} + \partial_q B_{2qj} = 0 \\ \partial_n B_{qrpj} = 0 \end{cases}$$

$$II \quad \begin{cases} \partial_q \xi^p + \partial_i B^{2p} = -\frac{f}{c} u^i \\ \partial_i \xi^i = \rho \end{cases}$$

ξ blijven wij dus hier nog als vector schrijven, B schrijven we daarentegen als bivector

De indices

(43.2) h, i, j, k, l, m doorloopen de waarden 1, 2, 3, 4
 p, q, r, s, t, u " " " 1, 2, 3 en
 dus niet 4

We schrijven voor ξ_p , voorloopig alleen formeel:

$$(43.3) \quad \xi_p = -\xi^p = +F^{pq} = -F^{qp} = -F_{pq} = +F_{qp},$$

waarvoor de vergelijkingen overgaan in

$$(43.4) \quad I \quad \begin{cases} \partial_i F_{qj} + \partial_q F_{ji} + \partial_j F_{iq} = 0 \\ \partial_n B_{qrpj} = 0 \end{cases}$$

$$II \quad \begin{cases} \partial_q F^{ip} + \partial_i B^{2p} = -\frac{f}{c} u^i \\ \partial_i F^{i4} = -\rho \end{cases}$$

Schrijven we eveneens alleen nog formeel:

$$(43.5) \quad B_{2q} = F_{2q} = -F_{q2} = F^{1q} = -F^{q1}$$

$$S^p = -S_p = \frac{f}{c} u^p; \quad S^4 = S_4 = \rho,$$

dan krijgen we tenslotte

$$(43.6) \quad I \quad \partial_j F_{ki} = 0$$

$$II \quad \partial_j F^{jk} = -S^k.$$

Deze vergelijkingen zijn echter invariant bij Lorentztransformaties indien F_{ki} zich transformeert als bivector en S^k als vector van de Ruimte-tijd-wereld.

Daaruit volgt:

De natuurwetten neergelegd in de vergelijkingen van Maxwell-Lorentz zijn invariant bij Lorentz-transformaties van x, y, z , et en daarmee gepaard gaande zoodanige

transformaties van de kentallen en de velden $E, B, A, \dots$ en φ , dat de combinaties van deze kentallen genaamd F_{ik} en s^k zich transformeeren als de kentallen van een bivector resp. vector der ruimte-tijdwereld.

Laten wij alleen transformaties toe, die den tijd invariant laten (drie dimensionale draaiingen) dan zijn de beide vergelijkingensystemen (41.1) en (43.6) volkomen equivalent. (F_{ik} is dan een ruimte vector). Bij Lorentz transformaties echter zijn de vergel. (41.1) niet invariant. F_{ik} noemt men ^{de lineaire} het electromagnetische veld. Splitsing in een electrisch en een magnetisch gedeelte heeft alleen relatieve beteekenis.

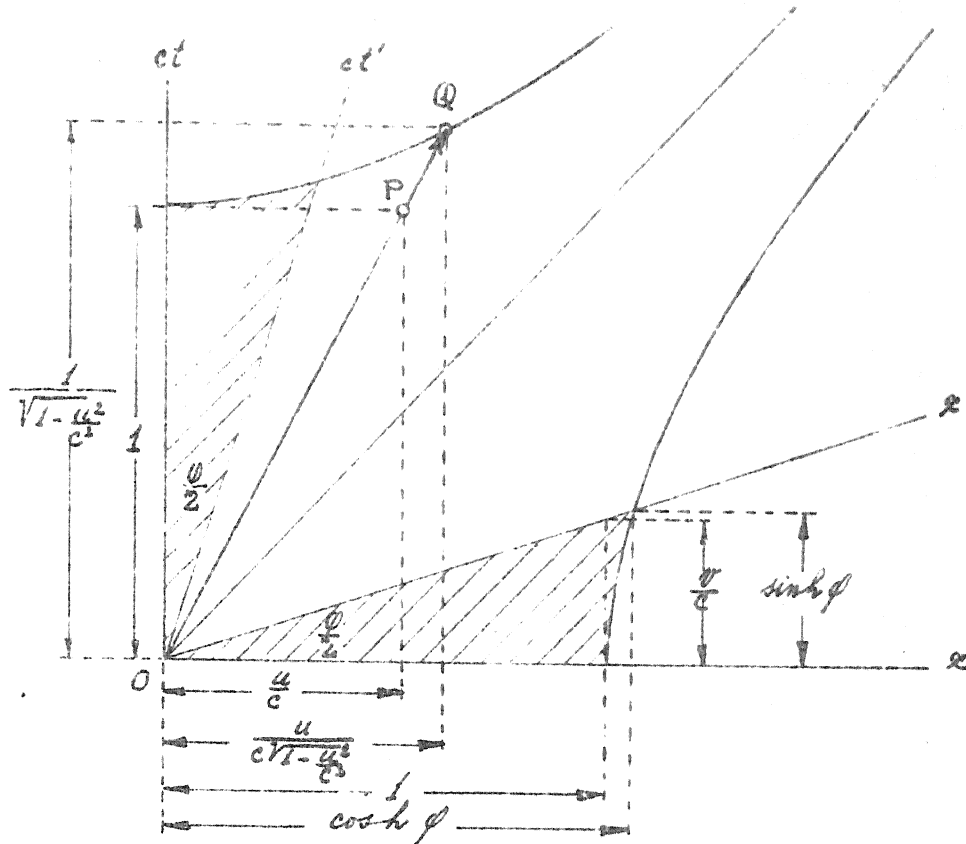
De vergelijkingen kunnen op grond van hun invarianten vorm ook in willekeurige ^{*} scheve coördinaten geschreven worden:

$$(44.1) \quad \begin{aligned} I \quad \partial_k F_{ik} &= 0 \\ I \quad \partial_k F^{ik} &= -s^k \end{aligned}$$

Lorentztransformaties.

Iedere Lorentztransformatie kan verkregen worden door een speciale Lorentztransformatie in het x, t -vlak gevolgd door een gewone draaiing in de ruimte loodrecht op de nieuwe t -as (blz.36). Deze laatste is niet belangrijk, aangezien de invariantie der vergelijkingen bij gewone draaiingen in de ruimte evident is. We beschouwen dus nu eens alleen de speciale Lorentztransformatie van blz.33:

$$(44.2) \quad \begin{aligned} x' &= x \cosh \varphi - c t \sinh \varphi \\ y' &= y \\ z' &= z \\ c t' &= x \sinh \varphi + c t \cosh \varphi. \end{aligned}$$



De kinematische beteekenis van deze transformatie is, dat een punt in rust t o van het stelsel $x't'$ (d.w.z. $\frac{dx'}{dt'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dz'}{dt'} = 0$) de wereldlijn ct' volgt en dus in den tijd $\frac{1}{c}$ den afstand $\frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi}$ doorloopt. De snelheid van het stelsel $x't'$ ten opzichte van het stelsel xt is dus

$$(45.1) \quad v = v^x = c \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi}, \quad v^y = 0, \quad v^z = 0$$

Men kan dit zoowel uit de fig. als uit (44.2) afleiden.

Het verband tusschen $x't'$ en xt kan men nu in v inplaats van in φ uitdrukken. Uit (45.1) volgt met behulp van de formule $\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$

$$(45.2) \quad \sinh \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \frac{v}{c} = \beta \text{ (gemakshalve)}$$

De Lorentztransformatie (44.2) laat zich nu als volgt schrijven

$$(45.3) \quad \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} ct = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ ct' &= -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} ct = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

Beschouwen we een punt dat zich van O uit met een snelheid $u = u^x, 0, 0$ ten opzichte van xt beweegt. Dit punt beschrijft

in het x, t -vlak dus een lijn met de vergelijking $x = u t$ (wereldlijn van het punt). Ten tijde $t = \frac{t}{\gamma}$ is dit punt in de wereldfilm in het punt P met de coördinaten $\frac{u}{c}, 1$ gekomen. Dit punt heeft volgens de transformatieformule (45.3) in het stelsel x', t' de coördinaten

$$(46.1) \quad \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{u}{c} - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{u}{c} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Volgens het oordeel van den bewegelijke ^{waarnemer} heeft dus het bewegelijke punt een snelheid

$$(46.2) \quad u' = u^1 = c \frac{\frac{u}{c} - \beta}{-\beta \frac{u}{c} + 1} = c \frac{\frac{u-v}{c}}{-\frac{uv}{c^2} + 1} = \frac{u-v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

(Dit is de relativistische samenstelling van snelheden; voor $c = \infty$ gaat de formule over in de formule der gewone kinematica: $u' = u - v$). Nu moet s^k zich als een vector transformeeren (blz. 44). Onderstellen we dat de snelheid de richting van de x -as heeft, dus $s^1 = \frac{\rho}{c} u^1$; $s^2 = 0$; $s^3 = 0$; $s^4 = \rho$, dan moet de transformatie dus luiden

$$(46.3) \quad \frac{\rho'}{c} u' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\rho}{c} u^1 - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \rho$$

$$(46.4) \quad \rho' = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\rho}{c} u^1 + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \rho = \rho \frac{1 - \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Substitueert men de waarde van ρ' uit (46.4) in (46.3) dan volgt

$$(46.5) \quad u^1 = \frac{u - \beta c}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

geheel in overeenstemming met (46.2). Uit (46.4) volgt, dat de waarde van ρ' ten opzichte van een assenstelsel, dat met de lading meebeweegt, is ($u = v$):

$$46.6 \quad \bar{\rho} = \rho \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \rho \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

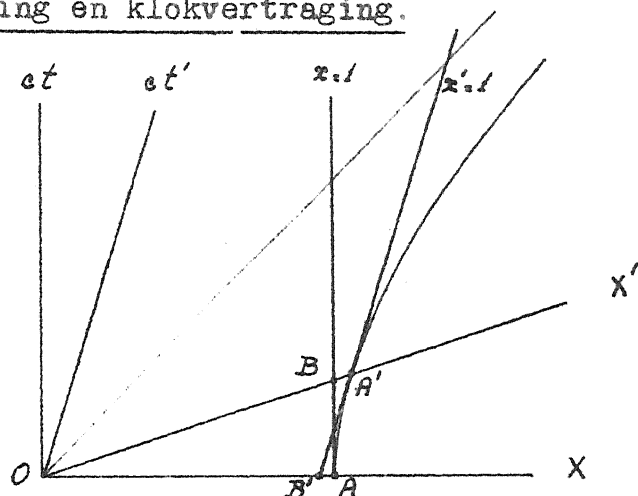
Deze invariante heet de electrische rustdichtheid; het is de electrische dichtheid voor den meebewegenden waarnemer. Deelt men s^k door $\bar{\rho}$, dan moet er een vector voor den dag komen, die op invariante wijze de snelheid van het stelsel x', t' vastlegt,

en wiens kentallen alleen van de snelheid en dus niet meer van de lading afhangen. Deze vector

$$(47.1) \quad u^k = \frac{s^k}{\beta} \quad \text{komponenten:} \quad \begin{cases} \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} u^i \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

waarvoor geldt $g_{kl} u^k u^l = 1$, en die dus den duur 1 heeft (blz. 28), heet de eenheidsvector van de snelheid (Vierervector der Geschwindigkeit). Zijn eindpunt ligt in $\mathcal{Q}$ op een (duur-) afstand 1 van $\mathcal{O}$. s^k heet de vierdimensionale stroomvector (Viererstrom).

Staafterkorting en klokvertraging.



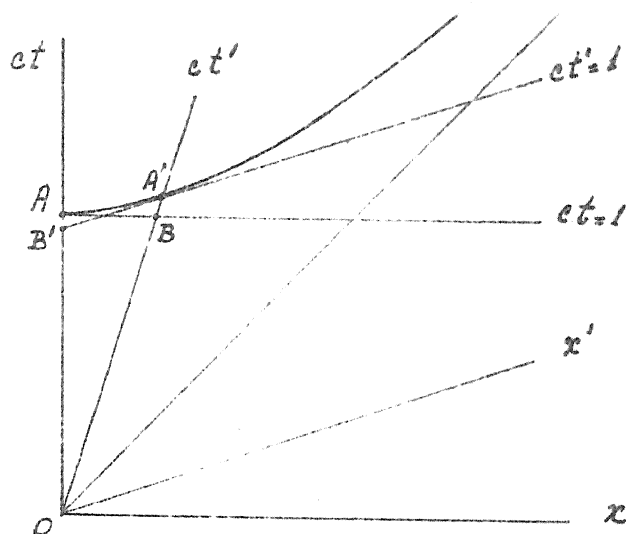
Onderstellen we, dat de staaf OA van de lengte 1 in rust is ten opzichte van x, t , dan snijdt de wereldband van dezen staaf van de x' as een stuk OB af, dat kleiner is dan het stuk OA' dat voor den bewegelijken waarnemer de lengte 1 heeft. De staaf schijnt dus verkort in reden van (zie de fig. op blz. 45)

$$(47.2) \quad \frac{OB}{OA'} = \frac{\frac{x}{c}}{\sinh \varphi} = \frac{\beta \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} = \sqrt{1 - \beta^2} : 1$$

Omgekeerd vormt de staaf OA' van de lengte 1 ten opzichte van den bewegelijken waarnemer een wereldband, die uit de x -as een stuk OB' snijdt $< OA$. De verhouding is (zie de fig. op blz. 45)

$$(47.3) \quad \frac{OB'}{OA} = \frac{\cosh \varphi - \sinh \varphi \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi}}{1} = \frac{1}{\cosh \varphi} = \sqrt{1 - \beta^2} = 1$$

Beide staven vertoonen dus voor den anderen waarnemer dezelfde verkorting



In het stelsel x, t stelle men langs de x -as een rij klokken op, die alle den tijd t aanwijzen. Ten tijde dat deze klokken den tijd $\frac{1}{c}$ aanwijzen bevinden zij zich alle op de lijn $ct=1$. In het bewegelijke stelsel x', t' doet men precies hetzelfde langs de x' -as, die klokken wijzen dan alle $\frac{1}{c}$ aan wanneer zij op de lijn $ct'=1$ gekomen zijn. De waarnemer in x, t beschrijft de t -as als wereldlijn. Ten tijde $t=0$ valt er in O een x, t -klok samen met een x', t' -klok en beide wijzen dan nul aan. Ten tijde $t=\frac{1}{c}$ is de x', t' -klok in B gekomen en valt daar samen met een andere x, t -klok, die juist $\frac{1}{c}$ aanwijst. De x', t' klok wijst echter slechts $\frac{OB}{OA} = \sqrt{1-\beta^2}$ aan en schijnt dus in de verhouding $\sqrt{1-\beta^2} : 1$ verlangzaamd. Omgekeerd zal de x, t klok, die ten tijde $t=0$ in O was, ten tijde $t=\frac{1}{c} \frac{OB'}{OA'}$ in B' gekomen zijn en daar samenvallen met een van de x', t' -klokken die dan juist $\frac{1}{c}$ aanwijst. Ook de x, t -klok schijnt dus voor den anderen waarnemer vertraagd in de verhouding $\sqrt{1-\beta'^2} : 1$. De klokkenfiguur is het spiegelbeeld van de meetstavenfiguur ten opzichte van de lijn $x=ct$.

Rustdichtheid

De meetstaafverkorting verklaart nu ook de merkwaardige transformatie van de dichtheid ρ . Is de meetstaaf electrisch geladen, dan meet de meebewegende waarnemer een lengte l en een dichtheid ρ . De waarnemer echter, die zich met een snelheid v ten opzichte van de staaf in de lengterichting van den staaf beweegt, meet volgens (46.6) een dichtheid $\rho = \frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}}$ en een lengte $\sqrt{1-\beta^2} l$. Dat wil zeggen dat de totale lading voor beide waarnemers dezelfde en dus een invariante is.

Relativiteitspostulaat.

Het meetstaven- en klokkenexperiment onderstelt, dat de invariatie bij Lorentztransformaties, die bij de vergelijkingen van

Maxwell-Lorentz geconstateerd is, nu ook geldt voor alle andere natuurverschijnselen, en het bijzonder dus voor de mechanische Dit is het relativiteitspostulaat Dat de vergelijkingen van Maxwell-Lorentz invariant zijn bij Lorentztransformaties is geen postulaat maar eenvoudig een feit Het nieuwe postulaat eischt, dat ook materiele meetstaven en klokken aan de zelfde invariantie onderworpen zijn, dat dus met name een bewegende klok niet de t maar de (oorspronkelijk als betekenislouze hulpvariabele beschouwde) t' aanwijst. Dit is iets princiepueel nieuws

Relativistische mechanica van veld en ladingen.

Bij geldigheid van het relativiteitspostulaat moeten de vergelijkingen der klassieke mechanica ongeldig worden. Want de grondvergelijking van die mechanica

$$(49.1) \quad K_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} ; \text{ cyc.}$$

is zeker niet invariant bij Lorentztransformaties Zij is wel invariant bij een andere groep (de Galileitransformaties) bestaande uit alle overgangen tot koördinatenstelsels die verkregen kunnen worden door rotaties en translaties waarbij de tijd constant gehouden wordt en bovendien door in den tijd gelijkmatige translaties. Men mag dus in de klassieke mechanica overgaan tot een ander vast koördinatenstelsel, dat uit het gegevene vaste kan worden verkregen door translatie en rotatie en dan bovendien nog aan dat laatste stelsel een gelijkmatige translatie ten opzichte van het vaste geven (dus geen rotatie en geen versnelling).

Daar de invariantie der Maxwell-Lorentzsche vergelijkingen wel gefundeerd is, en een invariantie dezer vergelijkingen bij de Galileigroep met zekerheid niet bestaat moet er gezocht worden naar een relativistische mechanica invariant bij Lorentztransformatie. De brug daartoe wordt geleverd door de vergelijkingen voor de kracht in het electromagnetische veld.

Voor de kracht op een lading e geldt, in gewone vectoranalyse

$$(49.2) \quad \overset{3}{K} = e \bar{E} + \frac{e}{c} \bar{u} \times \bar{B}$$

I) De index 3 boven K dient om deze driedimensionale kracht te onderscheiden van een later optredende vierdimensionale.

en is deze kracht dus opgebouwd uit een electrisch stuk $e\bar{\xi}$ en een magnetisch stuk $\frac{e}{c}\bar{u}\times\bar{B}$

De kracht per volume-eenheid is dus

$$(50.1) \quad \bar{p} = \rho \bar{\xi} + \frac{e}{c} \bar{u} \times \bar{B}$$

of in Ricci-notatie ($p, q, r, \dots = 1, 2, 3$):

$$(50.2) \quad p^r = \rho \xi^r + \frac{e}{c} u_q B^{qr}$$

Beide deelen der kracht laten zich nu voor het electrostatische resp. het magnetostatische geval als divergentie van een tensor schrijven, den electrischen resp. magnetischen spanningstensor.

Wij voeren dit uit voor het electrische deel:

Uit de Maxwellvergel. (43.1-II) volgt

$$(50.3) \quad \rho = \partial_i \xi^i$$

Buiden wij het electrische gedeelte van de kracht aan door p_k^r , dan geldt hiervoor de uitdrukking

$$(50.4) \quad p_k^r = \xi_p \partial_i \xi^i = (\partial_i \xi_p \xi^i) - (\partial_i \xi_p) \xi^i.$$

In het electrostatische geval is volgens de Maxwellvergelijking (43.1-I)

$$(50.5) \quad \partial_i \xi_{p,i} = 0$$

waardoor (50.4) overgaat in

$$(50.6) \quad p_k^r = g^{rs} \partial_i (\xi_s \xi^i - \frac{1}{2} A_s^i \xi_s \xi^i) = \partial_i (\xi^r \xi^i - \frac{1}{2} g^{rs} \xi_s \xi^i)$$

of

$$(50.7) \quad p_k^r = -\partial_i S^{ri}$$

S^{ri} is symmetrisch en het electrische deel van den

Maxwelllechen spanningstensor. De kentallen van dezen tensor S^{pq} kan men als matrix schrijven:

$$(51.1) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(-\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2 + \xi^3 \xi^3) & -\xi^1 \xi^2 & -\xi^1 \xi^3 \\ -\xi^1 \xi^2 & \frac{1}{2}(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2 + \xi^3 \xi^3) & -\xi^2 \xi^3 \\ -\xi^1 \xi^3 & -\xi^2 \xi^3 & \frac{1}{2}(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2 - \xi^3 \xi^3) \end{vmatrix}$$

Voor het magnetische deel maakt men gebruik van de vergelijkingen

$$(51.2) \quad \frac{f}{c} u_q = -\partial_z B^z_q$$

en

$$(51.3) \quad \partial_k B_{q[k] = 0,$$

die voor het magnetostatische geval gelden. (zie 43.1). De bij deze berekening te voorschijn komende magnetische spanningstensor heeft de kentallen:

$$(51.4) \quad S^{pq} = -B^p_z B^{qz} + \frac{1}{4} g^{pq} B_{zs} B^{zs}$$

of geschreven in matrixtabel, waarbij wij B^{12} vervangen door B^{21} enz. (zie blz. 344)

$$(51.5) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(-B^1 B^1 + B^2 B^2 + B^3 B^3) & -B^1 B^2 & -B^1 B^3 \\ -B^1 B^2 & \frac{1}{2}(B^1 B^1 - B^2 B^2 + B^3 B^3) & -B^2 B^3 \\ -B^1 B^3 & -B^2 B^3 & \frac{1}{2}(B^1 B^1 + B^2 B^2 - B^3 B^3) \end{vmatrix}$$

Deze matrix heeft denzelfden vorm als die van de kentallen van den electrischen spanningstensor. Wij voeren ^(de berekening) niet uit, omdat de bewerkingen (verg. bijv. Weyl 5de druk blz. 67) dezelfde zijn als bij de samenvatting van beide gevallen, die nu volgt.

Vatten wij beide gevallen samen, dan is de kracht (50.1)

$$(51.6) \quad p^i = \rho F^{i0} + \frac{f}{c} u_q F^{iq}$$

Nu is echter volgens de Maxwellvergelijkingen (43.4) en (43.6)

$$(52.1) \quad \begin{aligned} p &= -\partial_j F^{j4} \\ \frac{p}{c} u^p &= -\partial_j F^{jp} \end{aligned}$$

zoodat (51.6) overgaat in

$$(52.2) \quad p^p = -(\partial_j F^{j4}) F^{4p} - (\partial_j F^{jp}) F^{4p} = -(\partial_j F^{j4}) F^{4p}$$

De kracht p^p is derhalve de ruimtekomponente van een vector k^k

$$(52.3) \quad \begin{aligned} k^k &= -(\partial_j F^{jk}) F^{4k} = +s_k F^{4k} \\ p^p &= k^p \end{aligned}$$

dien wij den vierdimensionalen krachtvector noemen (Viererkraft).
Nu is

$$(52.4) \quad k^k = -(\partial_j F^{jk}) F^{4k} = -(\partial_j F^{jk} F^{4k}) + F^{jk} (\partial_j F_{4k}) g^{4k}$$

Door gebruikmaking van de eerste Maxwellvergelijking kunnen wij hiervoor schrijven

$$(52.5) \quad \begin{aligned} k^k &= -(\partial_j F^{jk} F^{4k}) - \frac{1}{2} F^{jk} (\partial_l F_{jk}) g^{4l} \\ &= -\partial_j \left\{ -F^{jk} F^{4k} + \frac{1}{4} g^{4l} F_{ll} F^{4k} \right\} \end{aligned}$$

Het gedeelte tusschen accoladen wordt de spanningstensor S^{jk} genoemd. De 4-dimensionale krachtvector laat zich dan schrijven als een divergentie van dezen tensor

$$(52.6) \quad \boxed{k^k = -\partial_j S^{jk}}$$

Wij zagen reeds, dat de ruimtecomponenten van k^k de kracht p^p was. Wat is echter de beteekenis van k^4 ?
Uit (52.3) volgt

$$(53.1) \quad k^4 = S_i \bar{F}^{i4} = -s_p \bar{F}^{p4} = -\frac{1}{c} u_p \bar{E}^p = -\frac{1}{c} u_p k^p = -\frac{1}{c} \vec{u} \cdot \vec{k}$$

dat wil dus zeggen, dat k^4 de door het elektrische veld per tijds- en volume-eenheid verrichte arbeid is.

De 16 componenten van S^{ik} zijn ook in een matrixtabel op te schrijven. Uit (52.5) ziet men gemakkelijk in, dat S^{pq} de som is van S^{p4} en S^{q4} . De kentallen van S^{pq} vindt men dan uit (51.1) en (51.5). Het zijn de kentallen van den Maxwell'schen spanningstensor.

Voor S^{44} vinden wij

$$\begin{aligned} (53.2) \quad S^{44} &= F_{,4}^4 \bar{F}^{44} + \frac{1}{4} F_{,p}^p \bar{F}^{p4} + \frac{1}{4} F_{,p}^p \bar{F}^{4p} = \\ &= -\frac{1}{2} F_{,4}^4 \bar{F}^{44} + \frac{1}{4} F_{,p}^p \bar{F}^{p4} = -\frac{1}{2} \bar{E}_4 \bar{E}^4 - \frac{1}{2} \bar{B}_p \bar{B}^p \\ &= -\frac{1}{2} (\bar{E} \cdot \bar{E} + \bar{B} \cdot \bar{B}) \end{aligned}$$

en is dus de energie van het veld per volume-eenheid. De kentallen S^{4p} zijn kentallen van een ruimtevector

$$(53.3) \quad S^{4p} = F_{,4}^p \bar{F}^{44} = \bar{E}_4 \bar{B}^p$$

Gebruiken wij het schema van blz. 31, dan zien wij dat de vector met de kentallen S^{4p} voorgesteld kan worden door

$$(53.4) \quad \bar{E} \times \bar{B}$$

(Men heeft b.v. $S^{41} = \bar{E}_1 \bar{B}^{11} + \bar{E}_2 \bar{B}^{21} = \bar{E}_2 \bar{B}_1 - \bar{E}_1 \bar{B}_2$)

Het c -voud van dezen vector wordt Poyntingsche vector genoemd. Deze stelt den energiestroom in het veld voor.

Om de vergelijking (52.6) te duiden gaan we uit van de continuïteitsvergelijking van een stroomende vloeistof met dichtheid ¹⁾ μ en stroomdichtheidsvector i^i

¹⁾ De hier bedoelde dichtheden zijn fysieke dichtheden en geen wiskundige. (blz. 24).

$$(54.1) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_q i^q = 0 \quad (\text{voor stationaire strooming } \partial_q i^q = 0)$$

Deze vergelijking brengt tot uitdrukking dat nergens vloeistof opborrelt of verdwijnt. De vergelijking

$$(54.2) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_q i^q = q$$

brengt daarentegen tot uitdrukking dat er per tijds en volume-eenheid een hoeveelheid vloeistof q opborrelt.

Beschouwen we nu eerst de vierde der 4 vergelijkingen

(52.6)

$$(54.3) \quad k^4 = -\partial_j S^{j4} = -\partial_q S^{q4} - \partial_v S^{v4}$$

$$k^4 = \frac{1}{c} \quad (\text{energie door het veld per tijd en volume-eenheid afgestaan})$$

$$S^{44} = \text{energiedichtheid van het veld.}$$

$$S^{q4} = \frac{1}{c} \quad (\text{energiestroomdichtheidsvector van het veld})$$

en de vergelijking is dus de continuïteitsvergelijking van de energie: in totaal gaat er voor veld + ladingen geen energie verloren, en dat wel voor iedere keuze van het coördinatenstelsel.

Beschouwen we vervolgens de eerste der vergelijkingen

(52.6)

$$(54.4) \quad k^1 = -\partial_j S^{j1} = -\partial_q S^{q1} - \partial_v S^{v1}$$

Als wij in analogie met de gewone mechanica de komponente k^1 als de impuls-dichtheidsaanwinst der ladingen in de x -richting per tijds- en volume-eenheid beschouwen, den skalar

$\frac{1}{c} S^{41}$ als impulsdichtheid in de x -richting van het veld en den vector

S^{q1} als stroomdichtheidsvector van den impuls in de

x -richting van het veld

opvatten, dan stelt (54.4) de continuïteitsvergelijking van den impuls in de x -richting voor: in totaal gaat er voor veld + ladingen geen impuls in de x -richting verloren. Ook dit geldt

weer voor iedere keuze van het coördinatenstelsel. De vergelijking (52.6) brengt dus tot uitdrukking, dat energie en impuls samen in totaal als vierdimensionale vector niet verloren gaan. Energie en impuls per tijds- en volumeenheid aan de ladingen afgestaan vormen den vector k^k , den impulsenergievector, $c k^k$ is de energie per tijds- en volumeenheid door het veld aan de ladingen afgestaan, k^p de impuls per tijds- en volumeenheid door het veld aan de ladingen afgestaan. Voor het veld is het gecompliceerder, in het veld hebben we de energiedichtheid S^{44} (bij vastgehouden tijds een skalar), energiestroomdichtheid $c S^{4k}$ (bij vastgehouden tijds een ruimtelijke vector), impulsdichtheid $\frac{1}{c} S^{4k}$ (bij vastgehouden tijds een ruimtelijke vector) en impulsstroomdichtheid S^{kp} (bij vastgehouden tijds een ruimtelijke tensor), die samen den tensor S^{ik} samenstellen, den impulsenergietensor

We vinden derhalve de merkwaardige betrekking

$$\text{impulsdichtheid} = \frac{\text{energiestroomdichtheid}}{c^2},$$

waaruit volgt

$$\text{impuls} = \frac{\text{energiestroom}}{c^2}$$

Impuls komt dus in de relativistische mechanica niet alleen toe aan bewegende massa's maar ook aan stroomende energie, b.v. warmte-energie, elastische energie, enz. Is derhalve in een materieel voorwerp dat met een snelheid v beweegt een of andere energie E opgehoopt, dan is de energiestroom $E v$ en ψ vermeerdering van impuls tengevolge van het aanwezig zijn van E :

$$(55.1) \quad \frac{E v}{c^2}$$

Klassiek mechanisch gedacht zou het dus zijn alsof de massa van het voorwerp met $\frac{E}{c^2}$ vermeerderd ware. Van relativistisch standpunt kunnen we natuurlijk een dergelijke uitspraak nog niet doen, daar we nog niet weten of de impuls van een massa M ook relativistisch gelijk is aan $M v$.

Relativistische dynamica.

Tot nu toe zijn wel krachten opgetreden, $\vec{\mathcal{K}}$, $\vec{p}$ en $\vec{k}$ maar er is nog niets gezegd over de versnellende werking. Het relativiteitspostulaat voert tot de onderstelling, dat in een coördinatenstelsel ten opzichte waarvan een massa m in rust is, de gewone vergelijking der klassieke mechanica geldt

$$(56.1) \quad \frac{d^3 \vec{x}}{dt^3} = \frac{d}{dt} m \frac{d\vec{x}}{dt}$$

of

$$(56.2) \quad \frac{d^3 x^p}{dt^3} = \frac{d}{dt} m \frac{dx^p}{dt}.$$

Het is nu maar de vraag, wat bij relativistische veralgemeening uit $\frac{d^3 x^p}{dt^3}$ en uit m wordt. Maken we gebruik van de electrodynamica dan is duidelijk dat $\frac{d^3 x^p}{dt^3}$ geen stuk van een vierdimensionalen vector is. Want de kracht per volume-eenheid $\vec{p}$ was een dergelijk stuk, en daar

$$(56.3) \quad \frac{d^3 \vec{x}}{dt^3} = \frac{e}{\rho} \vec{p}$$

en ρ zich bij overgang tot een bewegelijk coördinatenstelsel als volgt transformeert

$$(56.4) \quad \rho = \frac{\rho^0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

transformeert zich $\frac{d^3 \vec{x}}{dt^3}$ anders dan $\vec{p}$. Voeren wij dus den vector

$$(56.5) \quad \mathcal{K}^p = \frac{e}{\rho} \vec{p} = \frac{\frac{d^3 x^p}{dt^3}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

in, dan is deze werkelijk een stuk van den vierdimensionalen vector

$$(56.6) \quad \mathcal{K}^h = \frac{e}{\rho} k^h$$

waarvan de vierde komponente

$$(56.7) \quad \mathcal{K}^4 = \frac{e}{\rho} k^4 = \frac{e}{\rho} \frac{1}{c} \sum_i u^i k^i = \frac{1}{c} \sum_i u^i \mathcal{K}^i$$

voor het g.e. van een massa die in rust is ten opzichte van het coördinatenstelsel juist nul is. Wij trachten nu met behulp van K^i een bij Lorentstransformaties invariante vergelijking op te stellen, die voor een t.o.v. de massa rustend coördinatenstelsel overgaat in (56.2). In die vergelijking kan natuurlijk dt niet voorkomen, maar wel de invariante uitdrukking

$$(57.1) \quad d\tau = c \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = dt \sqrt{1 - \beta^2}$$

Met behulp van τ kan men voor de vierdimensionalen eenheidsvector van de snelheid schrijven $u^k = c \frac{dx^k}{d\tau}$

Men probeere

$$(57.2) \quad K^k = \dot{m} \frac{dx^k}{d\tau}$$

waarin $\dot{m}$ een nader te bepalen constante is. Deze vergelijking is te splitsen in

$$(57.3a) \quad K^t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{\dot{m}}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dx^t}{dt}$$

$$(57.3b) \quad K^i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{\dot{m} c}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

De eerste vergelijking is voor $\beta=0$ identiek met (56.2), de tweede levert voor dat geval $0=0$. Want dan is $K^i=0$. Getrouw aan het relativiteitspostulaat eischen we nu dat de invariante vergelijking (57.2), die ten opzichte van een rustend coördinatenstelsel het gewenschte resultaat geeft, nu ook voor alle coördinatenstelsels de juiste vergelijkingen geeft. Stellen wij dan

$$(57.4) \quad m = \frac{\dot{m}_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad \dot{m}_0 = \text{rustmassa} = \text{massa t.o.v. mee-
bewegend systeem}$$

dan luiden de relativistische mechanische vergelijkingen t.o.v. van een willekeurig systeem

$$(57.5) \quad \begin{cases} K^t = \frac{d}{dt} m \frac{dx^t}{dt} \\ \sum_i u^i K^i = \frac{d}{dt} m c^2 \end{cases}$$

De eerste vergelijking leert dat de wet : kracht = $\frac{d}{dt}$ impulsie blijft doorgaan, dat echter in de impulsie m nog op een bijzondere wijze extra van de snelheid afhangt. De tweede vergelijking leert dat de arbeid door $\mathcal{K}$ verricht (links) opgenomen wordt in $m c^2$. Deze uitdrukking

$$(50.1) \quad m c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

stelt dus op een constante na de energie voor. Stelt men die constante 0 dan wordt de energie van een rustend massapunt

$$(50.2) \quad \boxed{m_0 c^2}$$

Het nulstellen van die constante is niet willekeurig. Wij zagen reeds dat impuls (met c vermenigvuldigd) en energie steeds stukken moeten zijn van een vierdimensionalen vector. Inderdaad vormt de uitdrukking $m \frac{dx^k}{dt}$ uit

$$(50.3) \quad \mathcal{K}^k = \frac{d}{d\tau} m \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} c m u^k$$

een dergelijken vector, die zich laat ontbinden in

$$(50.4a) \quad m \frac{dx^1}{dt} = c m u^1 = m \frac{dx^1}{d\tau} = m u^1$$

$$(50.4b) \quad m \frac{dx^4}{d\tau} = c m u^4 = m c$$

(zie blz. 47: $u^p = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}} u^p$)

De impulsenergievector is dus $m c$ vermenigvuldigd met den eenheidsvector u^k (blz. 28). Is $m c^2$ de energie, dan is de energiestroom $m c^2 u^1$ en dus volgt ook hier

$$(50.5) \quad \text{Impuls} = \frac{\text{energiestroom}}{c^2} \quad (\text{Planck 1918})$$

welke betrekking wij reeds bij de bespreking van den impulsenergietensor vonden. Hiermee zijn ook de aannamen van blz. 54 gerechtvaardigd.

Samenvatting:

rustende massa	m	heeft een energie	$m c^2$	en een impuls	0
bewegende	"	"	"	"	"
rustende energie	$\mathcal{E}$	"	"	massa	$\frac{\mathcal{E}}{c^2}$
energiestroom		heeft een impuls	$\frac{\text{energiestroom}}{c^2}$	"	0

Potentiaalvector.

Wij passen de stelling van blz. 38 toe op de vergelijking (43.6 I).
Er bestaat dus een vectorveld φ_λ , zoo dat

$$(59.1) \quad F_{\lambda\lambda} = 2 \partial_\lambda \varphi_\lambda$$

of, uitgeschreven in orthogonale coördinaten

$$(59.2) \quad \begin{aligned} B_x &= F_{23} = \partial_2 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_2 \\ \mathcal{E}_x &= F_{41} = \partial_1 \varphi_4 - \partial_4 \varphi_1 \end{aligned}$$

Deze vector φ_λ heet de potentiaalvector. φ_1 , φ_2 en φ_3 vormen een ruimtelijken vector, de vectorpotentiaal der gewone vectoranalyse, φ_4 is voor velden, die niet van den tijd afhangen de gewone potentiaal.

Voor een rustende puntlading e (in het punt $x=y=z=0$) lost men de differentiaalvergelijkingen

$$(59.3) \quad \begin{aligned} \partial_1 \mathcal{E}_x + \partial_2 \mathcal{E}_y + \partial_3 \mathcal{E}_z &= \rho \\ \partial_1 \mathcal{E}_z - \partial_3 \mathcal{E}_y &= 0 \end{aligned}$$

als volgt op. Men bepaalt φ_4 met behulp van de formule

$$(59.4) \quad \varphi_4 = \frac{-e}{4\pi r} ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$$

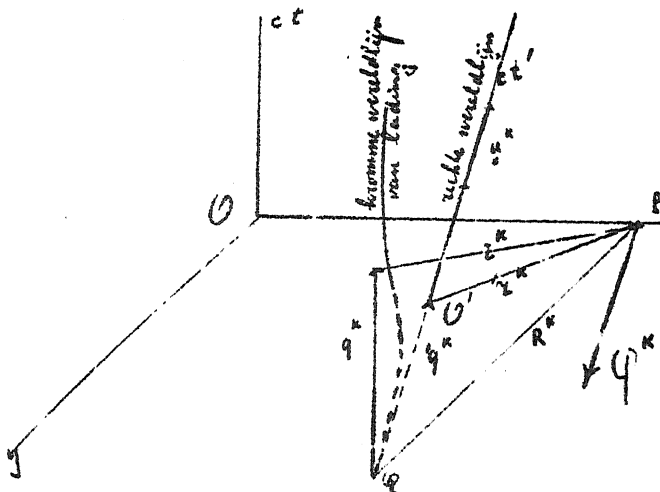
en dan is

$$(59.5) \quad \mathcal{E}_x = \partial_1 \varphi_4 ; \text{ cycl. } B_x = B_y = B_z = 0$$

Men overtuigt er zich gemakkelijk van, dat deze oplossing aan (59.3) voldoet.

Wij vragen nu naar de oplossing van de differentiaalvergelijkingen (43.6) I en II voor een bewegende puntlading. Nemen wij eerst het geval, dat een puntlading e zich met constante snelheid u , $\rho = 1, 2, 3$, ten opzichte van het stelsel (x, y, z, t)

beweegt. Men bepaalt dan eerst den potentiaalvektor φ voor een willekeurig punt P . Leg het xy -vlak door de baan en P en de x -as door P . De nulkegel door P snijdt de wereldlijn van



de lading in φ in het verleden. We brengen een nieuw assenstelsel aan, dat de wereldlijn als ct' -as heeft en een c' -as door P . Met betrekking tot dit stelsel is de lading in rust en derhalve in P :

$$(60.1) \quad \varphi_{\mu'} = -\frac{e}{4\pi z_{\mu'}}; \quad \varphi_{1'} = \varphi_{2'} = \varphi_{3'} = 0$$

De vector φ^k heeft dus de richting van de ct' -as en een duur $\frac{e}{4\pi \sqrt{-z^k z_k}}$. Is dus u^k de eenheidsvector van de snelheid dan is

$$(60.2) \quad \varphi^k = -\frac{e}{4\pi} \frac{u^k}{z}$$

Nu is echter (zie figuur)

$$(60.3) \quad z^k z_k = (R^k - \dot{q}^k)(R_k - \dot{q}_k) = -2\dot{q}^k R_k + \dot{q}^k \dot{q}_k; \quad (R^k R_k = 0)$$

en verder is de duur van q^k even groot als de lengte van z^k zoodat

$$(60.4) \quad z^k z_k = -\dot{q}^k R_k = -\sqrt{-z^k z_k} u^k R_k$$

zoodat

$$(60.5) \quad \boxed{\varphi_k = -\frac{e}{4\pi} \frac{u_k}{u^k R_k}}$$

Hiermede is een geheel van het assenstelsel onafhankelijke oplossing voor φ_k gevonden. We brengen deze nu terug op ons assenstelsel x, y, z, t . Dan is (daar duur $q^k = \text{lengte } z^k$) (vergl. 47.1)

$$(60.6) \quad \varphi_k = +\frac{e}{4\pi} \frac{\frac{1}{2} u^2}{z - \frac{1}{c}(u^1 z^1 + u^2 z^2 + u^3 z^3)}; \quad \text{cycl. 1.2.3.}$$

$$(61.1) \quad \varphi_4 = - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{e}{4\pi} \frac{1}{u^4 q_4 + u^3 z_3 + u^2 z_2 + u^1 z_1} =$$

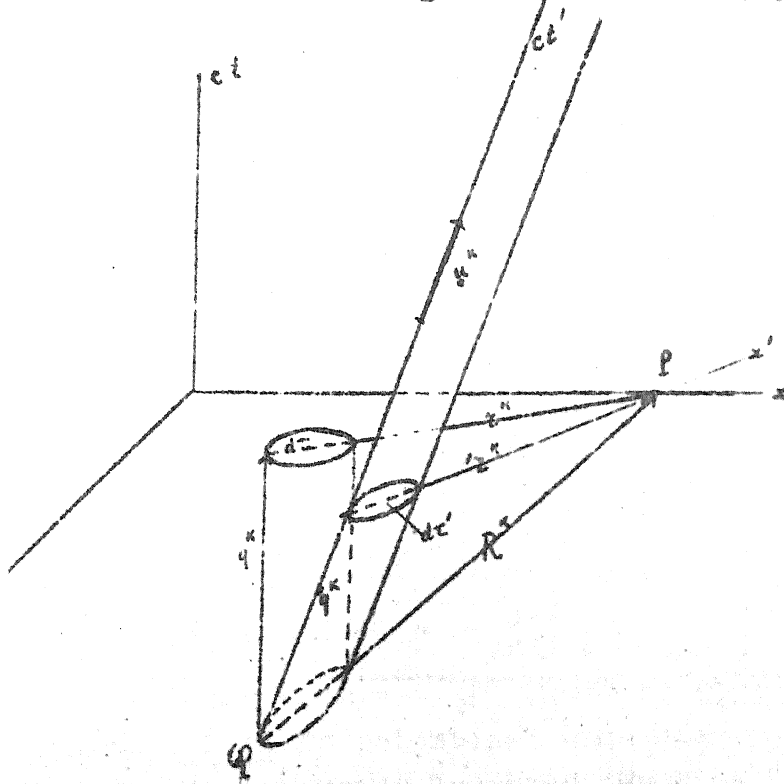
$$= - \frac{e}{4\pi} \frac{1}{z - \frac{1}{c} (u^1 z^1 + u^2 z^2 + u^3 z^3)}$$

daar

$$q_4 = z \quad ; \quad u^P = \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} u^P \quad ; \quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (61.47)$$

waar z de lengte van den vector z^μ voorstelt. (Lienard-Wiechert 98-00). Is de snelheid van de lading niet constant en dus de wereldlijn geen rechte, dan gelden de zelfde formules, φ is dan weer snijpunt van de wereldlijn met den nulkegel door P in het verleden. De vectoren q^μ en u^μ liggen in de raaklijn aan de wereldlijn in dat snijpunt. Het punt φ is dan het eenige punt van de wereldlijn van e , dat voor de potentiaal in P van belang is.

Wij beschouwen nu het geval van een continu verdeelde lading. Eenvoudigheidshalve onderstellen wij eerst een willekeu-



rig continu over een deel van de x, y, z -ruimte verdeelde lading met een constante snelheid u^P . Deze lading beschrijft een rechte wereldbuis, en wij beschouwen de infinitesimale buis van een klein deel der lading. Zij φ het snijpunt van deze infinitesimale wereldbuis met den nulkegel van P , $d\tau'$ de doorsnede met de $x'y'z'$ -ruimte en $d\tau$ de projectie van de doorsnede met den nulkegel van P op de x, y, z -ruimte.

Is de rustdichtheid van de lading ρ , dan is de bewegende lading $\rho d\tau'$ en de vierdimensionale stroomdichtheid is dus

$$(62.1) \quad S^\kappa = \frac{1}{4\pi} \rho^\kappa$$

Wij bewijzen nu dat

$$(62.2) \quad dz' : d\tau = z' : z = \dot{z} : \dot{\tau}$$

De doorsnede met den nulkegel is driedimensionaal, men kan er dus een kontravarianten trivector aan toevoegen, of met behulp van den eenheidsquadrivector $J_{\kappa\lambda\mu\nu}$ ook een kovarianten vector t_λ . Daar echter het hypervlak van t_λ aan den nulkegel in φ raakt, heeft de kontravariante vector t^κ de richting van R^κ . Bijgevolg is

$$(62.3) \quad d\tau' : d\tau = R_\lambda u^\lambda : R_\lambda \dot{z}^\lambda = \\ = \dot{z} : \dot{\tau} = z' : z$$

Mit (60.2) volgt dus dat de bijdrage van de buis van φ is

$$(62.4) \quad d\varphi^\kappa = -\frac{1}{4\pi} \frac{S^\kappa}{z'} d\tau' = -\frac{1}{4\pi} \frac{S^\kappa}{z} d\tau.$$

zoodat

$$(62.5) \quad \boxed{\varphi^\kappa = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{S^\kappa}{z} d\tau}$$

te integreeren over alle deelen der x, y, z -ruimte waar projecties liggen van doorsneden van stroombuizen met den nulkegel van P , d.w.z. waar bewegende lading aanwezig was op een tijd $\frac{z}{c}$ en van waaruit dus een lichtsignaal uitgestuurd op dien tijd juist ten tijde $t=0$ in P zou aankomen. Gaan we nu weer over tot willekeurig bewegende ladingen dan is van elke infinitesimale stroombuis weer alleen de doorsnede met den nulkegel van P van belang en we hebben dus voor elke buis de waarde van S^κ (die nu niet meer constant in den tijd is) te nemen ten tijde $t = -\frac{z}{c} = -\frac{z'}{\dot{z}}$:

$$(62.6) \quad \boxed{\varphi^\kappa = -\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{S^\kappa}{z} \right)_{z=-\frac{z'}{\dot{z}}} d\tau}$$

deze vorm van φ^κ , heet de formule van de gerateerde potentiaal. De potentiaal komt hier tot stand niet als functie van de bewegende ladingen ten tijde $t=0$ maar als functie van de

bewegende ladingen in het verleden, die zich in de ruimtetijdwereld op den nulkegel van P bevinden. Men integreert dus eigenlijk over dezen nulkegel.

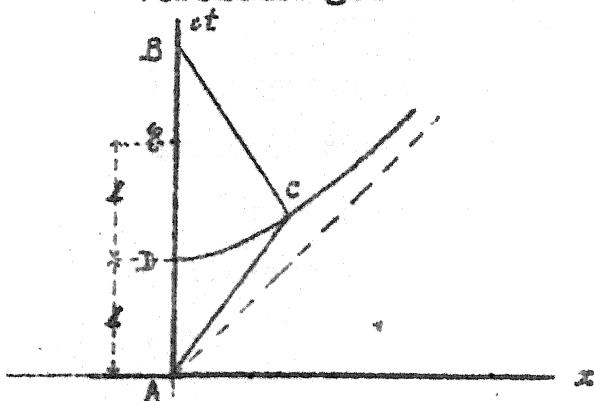
$$\frac{+ + + + + + + + + + + +}{+ + + + + + + + + + + +}$$

II. Algemeene Relativistische Mechanica.

Algemeene beschouwingen.

In de eenvoudige of speciale relativiteitstheorie worden de verschijnselen in zeker opzicht losgemaakt van de coördinaten. Alle orthogonale coördinaten in de RT-wereld zijn gelijkgerichtig, de algemeene formules hebben t.o.v. van elk dier coördinatenstelsels precies denzelfden vorm. Een experiment kan dus nooit leeren of een gegeven stelsel een eenparige snelheid heeft, want het op rust transformeeren van zoo'n stelsel is, als men den tijd op een behoorlijke wijze mee laat transformeeren, een Lorentztransformatie, d.i. een orthogonale transformatie in de R.T.-wereld, die weer tot een, met het eerste stelsel volkomen gelijkgerichtig stelsel, voert. Alle proeven om een „aetherwind“ te constateeren zijn dus, indien de theorie juist is, van te voren gedoemd om te mislukken. Mocht er eens een aetherwind aangetoond worden, dan valt daarmee de relativiteitstheorie, althans in dezen vorm.

Geheel anders is het met stelsels, die t.o.v. van elkaar versnellingen hebben.



Beschouw twee waarnemers.

I : Wereldlijn A B

II: Wereldlijn A C B

Is $A D = 1$, dan is ook $A C = 1$

(Minkowskische maat!) en dus

ook $B C = 1$. Waarnemer II

leest dus in B aangekomen af, dat zijn reis van A naar B $\frac{2}{c}$ seconden geduurd heeft.

Nu is echter A B A E dus 2, m.a.w. de waarnemers I en II zijn het er over eens, dat de klok van II t.o.v. van die van I achterloopt. Over de oorzaak van dit verschijnsel zijn zij voorloopig in het duister omdat

I verklaart: II heeft zich van mij met constante

snelheid verwijderd en is daarna met constante snelheid teruggekomen, en

II verklaart: precies hetzelfde van I.

Zij zullen dus moeten nagaan of een van beiden gedurende het experiment het een of ander beleefd heeft dat zijn klok verstoord kan hebben. Onderdaad heeft II iets bijzonders beleefd, namelijk in C een plotselinge vertraging, hij kan die vertraging met een mee genomen instrument gemeten of aan den lijve als „zeeziekte” gevoeld hebben. I heeft die ervaring niet gehad.

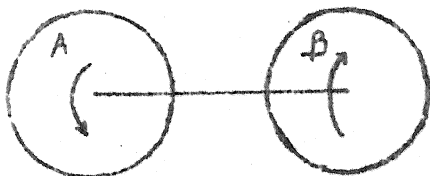
Conclusie:

Ondergaat een stelsel een versnelling, dan laat het zich niet meer zonder meer op rust transformeeren, een versneld stelsel is essentieel iets anders als een niet versneld.

Een versneld punt heeft een wereldlijn, die niet meer recht maar gebogen of gebroken is, en dat wel t.o.v. van alle „geoorloofde” koordinatenstelsels i.d.R.T.-wereld, dat zijn de orthogonale rechte lijnige koordinatenstelsels die door Lorentztransformaties in elkaar overgaan

Als „oorzaak” van het beschouwde effect moet hier dus de afwijking van de „rechte” wereldlijn t.o.v. van onze bevoorrechte coordinatenstelsels worden aangemerkt.

In de klassieke mechanica kan men een dergelijk voorbeeld construeeren. Twee volkomen gelijke, vrij zwevende, vloeistof/bollen



len wentelen t.o.v. van elkaar, om de verbindingslijn hunner middelpunten.

Dit is tot zoover volkomen relatief.

Rust echter A t.o.v. van de bevoorrechte coordinatenstelsels der klassieke mechanica, d.z. de „niet roteerende” coordinatenstelsels (de „absolute ruimte” van Newton), die t.o.v. van elkaar slechts eenparige translaties uitoefenen, dan zal B tengevolge van de middelpuntvliedende kracht afplatten. Rust daarentegen

B, dan zal A afplatten. Het experiment kan uitmaken wie van de twee rust, m.a.w. de „niet roteerende" coördinatenstelsels der klassieke mechanica laten zich experimenteel vastleggen. Ook hier is weer „oorzaak" van het verschijnsel het gedrag t.o.v. van zekere bevoorrechte coördinatenstelsels.

In beide gevallen, zowel in de speciale relativiteits-theorie als in de klassieke mechanica treffen we dus iets zeer onbevredigends ^(aan) aan coördinatenstelsels wordt in zekeren zin physische realiteit toegeschreven, terwijl wij toch moeten verlangen dat het gedrag van physische dingen alleen zal afhangen van hun betrekkingen tot andere physische dingen en niet van hun betrekkingen tot onphysische entiteiten als coördinatenstelsels, „absolute ruimte" e.d. Men zal dus moeten zoeken naar een middel om een versneld coördinatenstelsel op rust te transformeeren. Is de versnelling voor alle punten

$\vec{a}$, dan is dat in de klassieke mechanica heel gemakkelijk, men behoeft alleen een „schijnkracht" $-m\vec{a}$ in te voeren.

Treden er draaiingen op, dan krijgen de schijnkrachten bepaalde namen, „middelpuntvliedende kracht" en „Kracht van Coriolis" maar het principe blijft hetzelfde. Hiermee is echter nog niets gewonnen, er is zoiets gebeurd als het invoeren van een „schijnbaren" tijd t' met behulp van een Lorentztransformatie. De beslissende stap was daar, dat men inzag dat t' een even werkelijke tijd was als t en ook door de klokken in het bewegende stelsel werkelijk werd aangewezen. Hier moeten we dus vragen: zijn er werkelijke krachten bekend, die precies hetzelfde zouden doen als $-m\vec{a}$? Inderdaad voldoet de zwaartekracht aan dien eisch en wel op grond van het feit dat in de formule voor attractie van twee massa's

$$(70.2) \quad K = \int \frac{m m_1}{r^2}$$

de gravitatieconstante niet van den aard der materie afhangt.

Men drukt dit ook zoo uit: voor alle stoffen is de trage massa gelijk aan de graviteerende massa (proeven van Eötvös en Zeeman tot zeer hoogen graad van nauwkeurigheid). Tengevolge van deze gelijkheid is het voor een waarnemer in een afgesloten ruimte niet uit te maken of zijn systeem een voor alle punten gelijke versnelling $\vec{a}$ heeft, of dat hij zich met zijn geheele stelsel in een gravitatieveld bevindt, dat op iedere massa m een kracht $-m\vec{a}$ uitoefent.

Verder moeten we een eind maken aan de bevoorrechtiging van zekere coördinatenstelsels. Vooral hun rechtlijnigheid is hinderlijk, want bij versnellingen worden kromlijnige banen beschreven.

Wij gaan dus in de R.T.-wereld in eens over tot willekeurige kromlijnige coördinatenstelsels, waarvan er geen enkel meer bevoorrecht wordt en zullen dan moeten verwachten dat op de een of andere manier vanzelf de gravitatie een rol zal gaan spelen.

De rol, die de „absolute ruimte” zoowel in de klassieke mechanica als ook nog in de speciale relativiteitstheorie als „oorzaak” van verschijnselen heeft gespeeld, is daarmee voorgoed uit. Aangezien er geen bevoorrechte coördinatenstelsels meer zijn, zullen fysische gevolgen alleen fysische oorzaken hebben, d.w.z. de meetkunde in de R.T.-wereld zal uitsluitend afhangen van de materieverdeeling.

Voorbeelden van kromlijnige coördinatenstelsels in R_n en V_n .
Poolcoördinaten.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & , & & r &= |\sqrt{x^2 + y^2}| \\ y &= r \sin \theta & , & & \theta &= \arctan \frac{y}{x} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \end{aligned} \quad (7.1)$$

De parameterlijnen van r zijn de stralen $\theta = \text{constant}$, de parameterlijnen van θ zijn de cirkels $r = \text{const}$. Aan iedere x en y zijn bepaalde r en θ toegevoegd, alleen het

punt 0 maakt een uitzondering, dit is een singulier punt van de coördinatentransformatie. Zulke singuliere punten zijn gekenmerkt door het 0 of ∞ worden van de z.g. functionaaldeterminant, hier

72.1

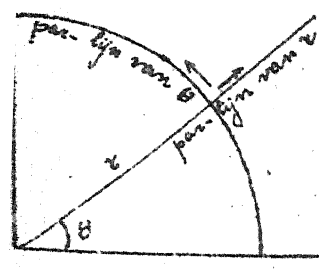
$$x: \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

of

72.2

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

Gaat men van r en θ uit, dan is de functionaaldeterminant



72.3

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{vmatrix} = \frac{1}{r}$$

De eene functionaaldeterminant is altijd gelijk aan 1: door de andere. Is deze determinant ergens +, dan beteekent dit dat de nieuwe parameterlijnen in dat punt hetzelfde soort (rechts of links) van assenstelsel vormen als de oude, is de determinant -, dan is het assenstelsel gespiegeld. Inderdaad is de draaiing van de + -richting van de parameterlijn van r naar de + -richting van die van θ hier dezelfde als die van + x -as naar + y -as.

Bolcoördinaten in de ruimte.

72.4

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \cos \theta \\ z &= r \sin \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

De parameterlijnen zijn:

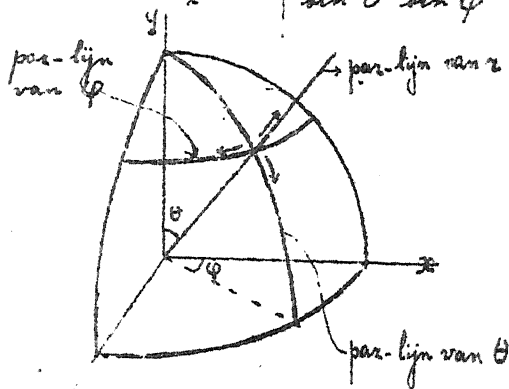
- van r : $\theta = \text{const.}, \varphi = \text{const.}$; stralen door 0
- van θ : $r = \text{const.}, \varphi = \text{const.}$; cirkels om 0 in vlakken door de y -as

van φ : $r = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$; cirkels met mp. in de

y -as, evenwijdig aan het xz -vlak.

De functionaaldeterminant is

$$73.1 \quad \begin{vmatrix} x: & \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ y: & \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ z: & \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = -r^2 \sin \theta$$



De y -as is dus een singuliere lijn. Inderdaad wordt aan een punt van de y -as geen bepaalde waarde van φ toegevoegd. De parameterlijnen van r , θ en φ vormen voor $\sin \theta > 0$ een links stelsel.

Bolcoördinaten op de bol.

Een bol met een straal R is een V_2 . De coördinaten θ en φ zijn kromlijnige coördinaten voor die V_2 . De parameterlijnen zijn de meridianen en parallellen, de polen zijn singuliere punten.

Elliptische coördinaten in R_2

De vergelijking

$$73.2 \quad \frac{x^2}{\frac{1}{2}c^2 + \lambda} + \frac{y^2}{-\frac{1}{2}c^2 + \lambda} = 1 \quad ; \quad c = \text{constant}$$

stelt een bundel van confocale ellipsen en hyperbolen voor met brandpunten in $x = \pm c$, $y = 0$. We hebben voor

$\lambda > \frac{1}{2}c^2$: ellips

$\lambda = \frac{1}{2}c^2$: $y = 0$; gedegenerende ellips of hyperbool

$-\frac{1}{2}c^2 < \lambda < \frac{1}{2}c^2$: hyperbool

$\lambda = -\frac{1}{2}c^2$: $x = 0$; gedegenerende hyperbool

$\lambda < -\frac{1}{2}c^2$: imaginaire kromme

(73.2) is een kwadratische vergelijking in λ :

$$73.3 \quad x^2(\lambda - p) + y^2(\lambda + p) = \lambda^2 - p^2$$

of

$$\gamma 4.1 \quad \lambda^2 - \lambda(x^2 + y^2) + p(x^2 - y^2 - p) = 0,$$

waaruit volgt

$$\gamma 4.2 \quad \left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \pm \sqrt{\frac{(x^2 + y^2)^2}{4} - p(x^2 - y^2 - p)}$$

dus $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Aangezien λ_1 en λ_2 wortels zijn, is

$$\gamma 4.3 \quad \begin{aligned} x^2(\lambda_1 - p) + y^2(\lambda_1 + p) &= \lambda_1^2 - p^2 \\ x^2(\lambda_2 - p) + y^2(\lambda_2 + p) &= \lambda_2^2 - p^2 \end{aligned}$$

en dus, voor $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\gamma 4.4 \quad \begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda_1 + p)(p + \lambda_2)}{2p} \\ y^2 &= \frac{(\lambda_2 - p)(p - \lambda_2)}{2p} \end{aligned}$$

Uit de tweede vergelijking volgt, dat voor $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > p$ en $\lambda_2 < p$ moet zijn. Het geval $\lambda_1 = \lambda_2$ kan zich alleen voordoen als

$$\gamma 4.5 \quad (x^2 + y^2)^2 = 4p(x^2 - y^2 - p)$$

is.

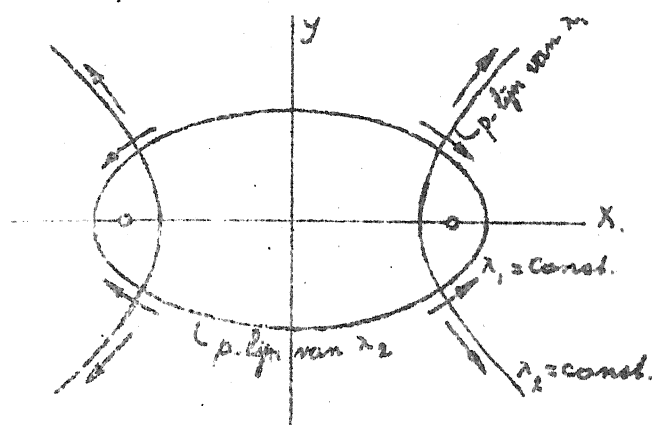
Deze vergelijking laat zich echter schrijven

$$\gamma 4.6 \quad \eta^2 + 2\eta(x^2 + 2p) + (x^2 - 2p)^2 = 0 \quad ; \quad \eta \stackrel{\text{def}}{=} y^2,$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} \eta &= -(x^2 + 2p) \pm \sqrt{(x^2 + 2p)^2 - (x^2 - 2p)^2} \\ &= -(x^2 + 2p) \pm 2\sqrt{2p}x^2 \\ &= -(x \pm \sqrt{2p})^2 \end{aligned}$$

Daar echter $y = y^2$ kan aan deze vergelijking slechts voldaan worden door $x = \pm \sqrt{2p} = \pm c$; $y = 0$, dus door de beide brandpunten.



Wij voeren nu λ_1 en λ_2 als nieuwe coördinaten in. Bij iedere x en y (bahalve voor de brandpunten) behoort een bepaalde λ_1 en λ_2 , omgekeerd behoren echter bij iedere λ_1 en λ_2 vier stelsels waarden van x en y . De parameterlijnen van λ_1

zijn de hyperbolen $\lambda_2 = k = \text{constant} < p$

$$\gamma 5.1 \quad \frac{x^2}{p+k} + \frac{y^2}{k-p} = 1$$

De parameterlijnen van λ_1 zijn de ellipsen $\lambda_2 = l = \text{const.} > p$

$$\gamma 5.2 \quad \frac{x^2}{p+l} + \frac{y^2}{l-p} = 1$$

De zin van de toename van λ_1 en λ_2 langs de parameterlijnen is in de figuur aangegeven. Het is noodzakelijk dezen zin in aanmerking te nemen bij het bepalen van het juiste teken van $\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}$ enz. in de functionaaldeterminant:

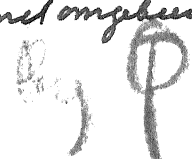
$$\gamma 5.3 \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} &= \pm \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_2+p}{\lambda_1+p}}; & \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} &= \pm \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_1+p}{\lambda_2+p}} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} &= \pm \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{p-\lambda_2}{\lambda_1-p}}; & \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} &= \pm \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_1-p}{p-\lambda_2}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{voor het:} \\ \text{eerste} \\ \text{tweede} \\ \text{derde} \\ \text{vierde} \end{array} \quad \text{kwadrant}$$

De functionaaldeterminant is dus

$$\gamma 5.4 \quad \begin{aligned} & \pm \frac{1}{4c^2} \left\{ \sqrt{\frac{(\lambda_2+p)(\lambda_1-p)}{(\lambda_1+p)(p-\lambda_2)}} + \sqrt{\frac{(\lambda_1+p)(p-\lambda_2)}{(\lambda_1-p)(\lambda_2+p)}} \right\} \\ &= \pm \frac{1}{4c^2} \left\{ \frac{(\lambda_2+p)(\lambda_1-p) + (\lambda_1+p)(p-\lambda_2)}{\pm 2pxy} \right\} = - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\partial p xy} \end{aligned}$$

Omgekeerd vindt men uit (γ 5.2)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} &= 2x \frac{\lambda_1 - p}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} &= 2y \frac{p - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} &= 2x \frac{p - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} &= -2y \frac{p - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}
 \end{aligned}$$

waaruit voor den anderen functionaaldeterminant de waarde $\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y}$ volgt. De x -as en de y -as zijn singuliere lijnen. Op de y -as is $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\partial p \partial y} = \infty$ en op de x -as is $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\partial p \partial x} = \infty$ voor $x \neq \pm c$ en voor $x = \pm c$. De parameterlijnen van λ_1 en λ_2 vormen in het tweede en vierde quadrant een stelsel net als x, y , in het eerste en derde een ~~geplaatst~~ stelsel met omgekeerde draaiing dromen het 

De X_4

Gegeven zijn vier veranderlijke (oervariabelen) $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, $\xi^i = 1, \dots, 4$, die alle waarden van $-\infty$ tot $+\infty$ kunnen doorloopen. De verzameling van alle mogelijke viertallen $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ vormt een vierdimensionale ruimte X_4 . Een enkel viertal heet punt van de X_4 , de getallen $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ die erbij hooren de coördinaten van het punt. Men kan andere oervariabelen invoeren door een transformatie

$$\xi'^i = \xi^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \quad i = 1, \dots, 4$$

Van deze transformatie onderstellen we dat de functies een ee voldoende aantal malen differentieerbaar is en dat de determinant van de matrix $\frac{\partial \xi'^i}{\partial \xi^j}$ in het beschouwde gebied van X_4 ongelijk nul is. Dan bestaat in dat gebied de omkeering van (76.2)

$$\xi^i = \xi^i(\xi'^1, \xi'^2, \xi'^3, \xi'^4)$$

Onder een geometrisch object wordt verstaan een toevoeging van een aantal getallen (kentallen van het object) aan ieder punt der X_4 voor ieder coördinatenstelsel en wel zoo dat bij transformatie de nieuwe kentallen zich laten opschrijven als functies uitsluitend van de oude en van de transformatie.

Grootheden in X_n

In de ruimte X_n definiëren we:

1) Een scalar, d.i. een grootheid met één kentel ϕ , toegevoegd aan een bepaald punt $\mathbf{f}$ van X_n , dat bij de transformatie (76.2) niet verandert. Is aan elk punt van een gebied van X_n een scalar toegevoegd, dan spreekt men van een scalarveld.

2) Een kontravariante vector, d.i. een grootheid met n kentallen v^{α} , toegevoegd aan een bepaald punt $\mathbf{f}$ van X_n , die zich bij (76.2) als volgt transformeeren:

$$77.1 \quad v^{\alpha'} = (A_{\alpha}^{\alpha'}) v^{\alpha} ; \quad A_{\alpha}^{\alpha'} = \left(\partial_{\alpha} \xi^{\alpha'} \right)_{\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f}'} ; \quad \partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} .$$

Is aan elk punt van een gebied van X_n een vector toegevoegd, dan spreekt men van een vectorveld.

dx^{α} is een kontravariante vector, want

$$77.2 \quad dx^{\alpha'} = A_{\alpha}^{\alpha'} dx^{\alpha} .$$

3) Een covariante vector, d.i. een grootheid met n kentallen w_{α} , toegevoegd aan een bepaald punt $\mathbf{f}$ van X_n , die zich bij (76.2) als volgt transformeeren:

$$77.3 \quad w_{\alpha'} = (A_{\alpha'}^{\alpha}) w_{\alpha} , \quad A_{\alpha'}^{\alpha} = \left(\partial_{\alpha'} \xi^{\alpha} \right)_{\mathbf{f}' \rightarrow \mathbf{f}} .$$

Overgang tot vectorveld als boven.

Is ϕ een scalarveld, dan is $\partial_{\alpha} \phi$ een covariant vectorveld, het gradientveld van ϕ :

$$77.4 \quad \partial_{\alpha'} \phi = A_{\alpha'}^{\alpha} \partial_{\alpha} \phi .$$

Voor $\partial_{\alpha} \phi$ geldt

$$77.5 \quad \partial_{\alpha} \partial_{\alpha'} \phi = 0 .$$

De vergelijking

$$77.6 \quad \partial_{\alpha} w_{\alpha} = 0$$

is de n.e.v. voorwaarde op het veld w_{α} een gradientveld is.

De lokale ruimten

Aan elk punt, bijv. ξ , van de X , voegen we een $\mathcal{E}$, toe met coördinaten X'' , die zich bij (70.1) als volgt transformeren

$$X'' = (A''_{\alpha}) X''$$

Het punt $X'' = 0$ wordt geïdentificeerd met ξ en contactpunt genoemd. Iedere $\mathcal{E}$, heeft met de X , alleen dit ééne punt gemeen. Twee tot verschillende punten behorende $\mathcal{E}$'s hebben niets gemeen. De $\mathcal{E}$'s heeten de lokaalruimten van de X . Men kan zich van deze $\mathcal{E}$, een beeld vormen door de X , te denken, liggende in een $\mathcal{E}_N$, $N > 4$, en dan als $\mathcal{E}$, te nemen de raak - $\mathcal{E}$, in deze $\mathcal{E}_N$ aan de X . Dit is echter gevaarlijk, omdat twee verschillende $\mathcal{E}$'s elkaar zouden kunnen snijden en een $\mathcal{E}$, een kromme, in plaats van alleen een punt met de X , gemeen zou kunnen hebben. Ziet men geheel van deze overvloedige gemeenschappelijke punten af, dan kan men het beeld gebruiken om aan de voorstelling tegemoet te komen. Aangesien het contactpunt bij de transformatie (70.1) dezelfde coördinaten (namelijk alleen nul) behoudt, gedragen zich p , v'' en w , in ξ'' volkomen als een skalar, een contravariante vector en een covariante vector in de lokale $\mathcal{E}$, van ξ'' . De beide laatste kunnen dus daar resp. door een punt en een hypervlak worden voorgesteld. Een veld voegt dus aan elke lokaalruimte een grootheid toe. Wij hadden dus bij de definitie van scalaren en vectoren ook van de lokaalruimten kunnen uitgaan en in elke lokaalruimte die grootheden op de gewone manier kunnen definiëren, zoals dit vroeger voor $\mathcal{E}_N$ is geschied. Deze weg volgen we voor alle verdere grootheden.

Affinoren en dichtheden.

Een affinor wordt in de lokaalruimte op de gewone manier gedefinieerd, bijv.

19.1
$$P^{k_1 \dots k_p} \dots \lambda'_1 \dots \lambda'_p = A^{k_1 \dots k_p}_{k_1 \dots k_p} \lambda'_1 \dots \lambda'_p P^{k_1 \dots k_p}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_p} \dots \lambda_1 \dots \lambda_p$$

alleen heeft nu $A^{k_1 \dots k_p}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_p}$ een andere betekenis, namelijk $\partial_{\lambda'_1} \dots \partial_{\lambda'_p} \xi^{k_1 \dots k_p}$. De eenheidsaffinor is hier

19.2
$$A^{k_1 \dots k_p}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_p} = \partial_{\lambda'_1} \dots \partial_{\lambda'_p} \xi^{k_1 \dots k_p}$$

Bewerkingen met affinoren in één en dezelfde locaalruimte, zijn natuurlijk net als in de ξ_{α} .

Dichtheden worden eveneens in de locaalruimte gewoon gedefinieerd, bijv. een scalaire dichtheid van het gewicht l :

19.3
$$\bar{g} = \Delta^{-1} g ; \quad \Delta = \text{Det}(\partial_{\lambda} \xi^{\alpha})$$

Maatvectoren

Om de maatvectoren in de locaalruimte te verkrijgen beschouwen we de n scalarvelden ξ^{α} , die uit ξ^{α} ontstaan door het afnemen van den Index α . Bij overgang tot $\xi^{\alpha'}$ blijven de ξ^{α} als scalarvelden invariant. De n uitdrukkingen

19.4
$$e^{\alpha}_{\lambda} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}$$

zijn blijkbaar n contravariante vectorvelden, die alleen kantallen 1 of 0 hebben. In elke locaalruimte vormen zij de n contravariante maatvectoren, die behooren bij de coördinaten (x^{λ}) .

Eenzoo zijn de n uitdrukkingen

19.5
$$\tilde{e}_{\alpha}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}$$

n covariante vectorvelden, die eveneens alleen kantallen 1 of 0 hebben en in elke locaalruimte de n covariante maatvectoren vormen, die bij (x^{λ}) hooren. Bij elk coördinatenstelsel hoort in elke locaalruimte zoo'n stel van n contra- en n covariante maatvectoren. Daar echter

19.6
$$\partial_{\alpha} \tilde{e}_{\lambda}^{\alpha} = 0$$

~~en een nilliding~~ ~~gehoort niet van n covariante vectoren~~ ~~en niet van deze vromanten stelsel~~ 60.

is, en dus de ~~gradientvectoren~~ zijn, blijkt, dat wanneer men in elke lokaalruimte een willekeurigstel van reciproke vectoren als maatvectoren zou nemen, deze in het algemeen niet tot een stelsel van coördinaten in X_n zouden behooren. Daarvoor is n.e.v. dat (79.5) geldt. Zulke stelsels van maatvectoren, die aan (79.6) voldoen en dus tot bepaalde coördinaten in X_n behooren, heeten holonoën, andere (die ook veel gebruikt worden) anholonoën. De uitdrukkingen

$$\delta^i_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^j}$$

zijn n^2 scalarvelden, die in elke lokaalruimte de n^2 scalaren van het Kroneckersymbool vormen.

Uitgaans 306

We bewijzen de stelling:

De quadrivector der nieuwe maatvectoren is gelijk aan den quadrivector der oude, vermenigvuldigd met Δ .

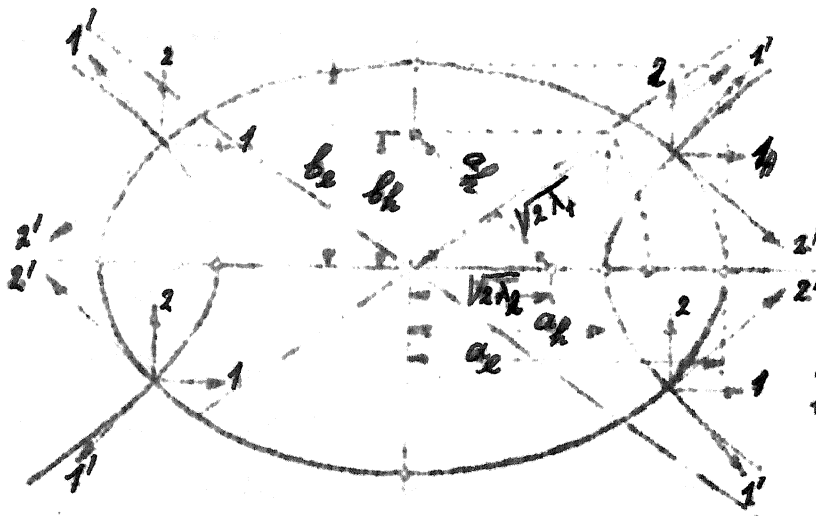
Bewijs (vergelijk blz. 26)

$$\begin{aligned} e^{\mu}_{\alpha} e^{\nu}_{\beta} e^{\gamma}_{\delta} e^{\epsilon}_{\epsilon} &= A^{\mu \nu \gamma \epsilon}_{\alpha \beta \delta \epsilon} e^{\alpha}_{\alpha} e^{\beta}_{\beta} e^{\gamma}_{\gamma} e^{\epsilon}_{\epsilon} \\ &= 4! A^{\mu \nu \gamma \epsilon}_{\alpha \beta \delta \epsilon} e^{\alpha}_{\alpha} e^{\beta}_{\beta} e^{\gamma}_{\gamma} e^{\epsilon}_{\epsilon} \\ &= \Delta^{\mu \nu \gamma \epsilon} e^{\alpha}_{\alpha} e^{\beta}_{\beta} e^{\gamma}_{\gamma} e^{\epsilon}_{\epsilon} \end{aligned}$$

De inhouden van de parallelotopen der maatvectoren verhouden zich dus als $1 : \Delta^{-1}$.

Als voorbeeld behandelen we de maatvectoren van de elliptische coördinaten in R_2 (verg. blz. 73). Noemen we $x = \xi^1, y = \xi^2$, $\lambda_1 = \xi^1$ en $\lambda_2 = \xi^2$, dan volgt uit (75.3)

$$\begin{aligned} e^1_{\lambda_1} &= A^1_{\lambda_1} e^{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 + p}} ; e^2_{\lambda_1} = A^2_{\lambda_1} e^{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 + p}} \\ e^1_{\lambda_2} &= A^1_{\lambda_2} e^{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{p - \lambda_2}} ; e^2_{\lambda_2} = A^2_{\lambda_2} e^{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{p - \lambda_2}} \end{aligned}$$



$$2\lambda_1 = a_1^2 + b_1^2$$

$$2\lambda_2 = a_2^2 + b_2^2$$

$$\frac{\text{length } 1'}{\text{length } 2'} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}$$

mod sign:

$$\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}$$

Langue
Eveneens geldt

$$e_1' \cdot A_1' \cdot e_1' = 2x \frac{p+\lambda_1}{\lambda_1 - p} \quad e_2' \cdot A_2' \cdot e_2' = 2y \frac{p+\lambda_2}{\lambda_2 + p}$$

of:

$$e_1' \cdot A_1' \cdot e_1' = 2x \frac{p-\lambda_1}{\lambda_1 - p} \quad e_2' \cdot A_2' \cdot e_2' = -2y \frac{p-\lambda_2}{\lambda_2 + p}$$

Hieruit volgt: $\Delta = \det(A_1', A_2') = -\frac{4p \cdot y}{\lambda_1 - \lambda_2}$ en deze determinant is, zoals het behoort, positief in het eerste en negatief in het derde en derde kwadrant. Daar we in een K_2 werken, kan men lengte, en hoeken bepalen.

De lengte van e_1' en e_2' zijn

$$\sqrt{e_1' \cdot e_1' + e_2' \cdot e_2'} = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{2p(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1^2 - p^2}}$$

resp.

$$\sqrt{e_1' \cdot e_1' + e_2' \cdot e_2'} = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_1 p}{\lambda_2 + p} + \frac{\lambda_2 p}{p - \lambda_2}} = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{2p(\lambda_1 - \lambda_2)}{p^2 - \lambda_2^2}}$$

en deze vectoren staan loodrecht op elkaar omdat

$$e_1' \cdot e_2' + e_2' \cdot e_1' = 0$$

De rechthoek der vectoren heeft dus een inhoud

$$\frac{1}{4c^2} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{(\lambda_1 - p)(\lambda_1 + p)(p - \lambda_2)(p + \lambda_2)}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{8p \cdot y}$$

en dit is, zoals het behoort, gelijk aan $|\Delta^{-1}|$. Bij de x -as en bij de y -as nadert de inhoud van den rechthoek tot ∞ .

doorgaan 30

Overbrenging, pseudoparallelisme

Tot nu toe zijn de lokale $\mathcal{K}_\alpha$ volkomen onafhankelijk van elkaar. Men kan nu in de $\mathcal{K}_\alpha$ een voorschrift geven om toe tot naburige punten behorende $\mathcal{K}_\beta$ op elkaar af te beslissen. Een dergelijk voorschrift heet een overbrenging (bij Feyl ook wel Zusammenhang). In de keuze van deze overbrenging heeft men alle vrijheid. De overbrenging zou bijv. zoo kunnen zijn, dat rechte lijnen in de een $\mathcal{K}_\alpha$ overgaan in kromme lijnen in de andere. We beschouwen hier alleen overbrengingen waarbij contravariante vectoren overgaan in contravariante vectoren, covariante in covariante en algemeen affinoren in affinoren van hetzelfde soort. De vector en de overgebrachte vector heeten pseudoparallel.

Zij nu v^α een gegeven vectorveld. Is v^α de veldwaarde in ξ^α , dan is v^α, dv^α de veldwaarde in $\xi^\alpha + d\xi^\alpha$ en

$$82.1 \quad dv^\alpha = d\xi^\alpha \partial_\alpha v^\alpha$$

Bringen we nu volgens het overbrengingsvoorschrift den vector v^α in ξ^α over naar $\xi^\alpha + d\xi^\alpha$. Dan heeft die overgebrachte vector koeltallen $v^{\alpha'}, \hat{d}v^{\alpha'}$ die natuurlijk slechts infinitesimaal van v^α verschillen. Zeker is in het algemeen $\hat{d}v^{\alpha'} \neq dv^{\alpha'}$ omdat immers het overbrengingsvoorschrift geheel willekeurig is. Gaan we nu over tot het stelsel (α') dan is, aangenomen volgens onderstelling $v^{\alpha'}, \hat{d}v^{\alpha'}$ in $\xi^{\alpha'}, d\xi^{\alpha'}$ weer een contravariante vector is

$$82.2 \quad v^{\alpha'}, \hat{d}v^{\alpha'} = (A^{\alpha'}_\alpha + dA^{\alpha'}_\alpha)(v^\alpha + \hat{d}v^\alpha)$$

waaruit volgt

$$82.3 \quad \hat{d}v^{\alpha'} = A^{\alpha'}_\alpha \hat{d}v^\alpha + v^{\alpha'} dA^{\alpha'}_\alpha$$

$\hat{d}v^{\alpha'}$ is dus geen vector. We hebben echter ook

$$82.4 \quad dv^{\alpha'} = A^{\alpha'}_\alpha dv^\alpha + v^{\alpha'} dA^{\alpha'}_\alpha$$

en daaruit volgt dat $\delta v^{\mu} = dv^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} v^{\nu} d\xi^{\lambda}$ wel een vector is:

$$\delta v^{\mu} = A^{\mu}_{\nu} \delta v^{\nu}$$

δv^{μ} is de differentiaal van het veld v^{μ} bepaald vanuit een volgens het overbrengingsvoorschrift mee verschoven vector v^{μ} . Deze differentiaal heet de covariante differentiaal. De overbrenging bepaalt de covariante differentiaal, en omgekeerd, is het voorschrift om de covariante differentiaal van alle grootheden te vormen bekend, dan kent men de overbrenging (verplaatst namelijk de grootheid zóó, dat de covariante differentiaal nul wordt).

We gaan nu axiomatisch een soort overbrenging vastleggen, die de eenvoudigst denkbare is en die te lineaire overbrenging noemen. De axioma's zijn:

- 1) Is ϕ een grootheid (het algemeenste geval is een affinordichtheid), dan is $\delta \phi$ een grootheid van dezelfde soort.

$$2) \delta(\phi \cdot \psi) = \delta \phi \cdot \delta \psi$$

$$3) \delta(\phi \psi) = \phi \delta \psi + (\delta \phi) \psi \quad (\text{regel van Leibniz})$$

naast elkaar schrijven symboliseert het algemeen product.

- 4) $\delta \phi$ is lineair homogeen in $d\xi^{\lambda}$.

- 5) De regel van Leibniz geldt ook voor overschuivingen.

- 6) De covariante differentiaal van een scalar is identiek met de gewone differentiaal: $\delta \phi = d\phi$

Waaruit volgt is:

Dit (1), (2) en (3) volgt dat de algemeenste vorm, die de covariante differentiaal van een kovarianten vector kan aannemen, is:

$$\delta v^{\mu} = dv^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} v^{\nu} d\xi^{\lambda} = (\partial_{\lambda} v^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} v^{\nu}) d\xi^{\lambda}$$

Hierin zijn $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ parameters, die op een bepaald coördinatenstelsel willekeurig als functies van ξ^{λ} gegeven kunnen

worden. Uit de transformatie van δv^i (axioma (1)) volgt dan het stelsel transformatieformules

$$84.1 \quad \delta v^i = A^i_j \delta x^j + \delta A^i_j x^j$$

$$A^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}, \quad A^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} + \delta A^i_j \quad (\text{met } \delta A^i_j = \delta x^i \frac{\partial}{\partial x'^j})$$

De δx^i zijn dus de kentallen van een geometrisch object; zij transformeeren zich echter ingewikkelder dan die van een affinoor. Uit (4) en (5) volgt

$$84.2 \quad d(v^i w_i) = \delta(v^i w_i) = (\delta v^i) w_i + v^i \delta w_i$$

en daaruit leidt men af

$$84.3 \quad \delta w_i = d w_i - \Gamma^j_{ik} w_j dx^k$$

Voor een affinoor, bijv. $P^{\alpha\beta}_o$ volgt uit (2):

$$84.4 \quad \delta P^{\alpha\beta}_o = d P^{\alpha\beta}_o + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} P^{\mu\beta}_o dx^\nu + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} P^{\alpha\mu}_o dx^\nu - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \Gamma^{\beta}_{\rho\sigma} P^{\mu\rho}_o dx^\nu dx^\sigma$$

Men behoeft dus het proces van toevoeging van een correctie-term slechts zoovele malen te herhalen als er indices zijn.

Uit de transformatieformule voor Γ^i_{jk} volgt voor $\delta \Gamma^i_{jk}$

$$84.5 \quad \delta \Gamma^i_{jk} = A^i_l \Gamma^l_{jk} - A^i_l \delta A^l_{jk} + A^i_l \delta A^l_{jk}$$

De Γ^i_{jk} zijn dus eveneens kentallen van een geometrisch object. De transformatie laat zich nog eenvoudiger schrijven. Wij herinneren eraan, dat A^i_j de minor van het element A^j_i (in de matrix der A^i_j) is gedeeld door de determinant $\Delta = \det(A^i_j)$. Bijgevolg is:

$$84.6 \quad \frac{\partial \Delta}{\partial A^i_j} = \Delta A^j_i$$

of het een andere grootte. Deze grootte kan men ook

$$84.7 \quad \delta \Delta = A^i_j \delta A^j_i$$

zoodat in plaats van (84.5) geschreven kan worden

85.1

$$\Gamma_{\mu}^{\lambda} = A_{\mu}^{\lambda} \Gamma - \partial_{\mu} \log \Delta$$

85.

De Γ spelen een rol bij de covariante differentiatie van dichtheden. Is $w_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ een covariante r -vector, dan is

$$85.2 \quad \delta w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = dw_{\lambda_1 \dots \lambda_n} - \Gamma_{\mu \lambda_1}^{\lambda_1} w_{\mu \lambda_2 \dots \lambda_n} d\xi^{\mu} - \dots - \Gamma_{\mu \lambda_n}^{\lambda_n} w_{\lambda_1 \dots \mu} d\xi^{\mu}$$

en dus

$$85.3 \quad \hat{d} w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = + \Gamma_{\mu \lambda_1}^{\lambda_1} w_{\mu \lambda_2 \dots \lambda_n} d\xi^{\mu} + \dots + \Gamma_{\mu \lambda_n}^{\lambda_n} w_{\lambda_1 \dots \mu} d\xi^{\mu}$$

waaruit volgt

$$85.4 \quad \hat{d} w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = \Gamma_{\mu}^{\lambda_1 \dots \lambda_n} w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} d\xi^{\mu}$$

Ma transformeert zich $w_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ echter als een kental van een dichtheid van het gewicht $+1$ (blz. 26), is dus λ een dichtheid van het gewicht $+1$, dan is ook

$$85.5 \quad \hat{d} \phi = \Gamma_{\mu}^{\lambda} \phi d\xi^{\mu}$$

en

$$85.6 \quad \delta \phi = d\phi - \hat{d} \phi = d\phi - \Gamma_{\mu}^{\lambda} \phi d\xi^{\mu}$$

Voor een dichtheid q van het gewicht k volgt dus

$$85.7 \quad \delta q = dq - k \Gamma_{\mu}^{\lambda} q d\xi^{\mu}$$

en voor een affinordichtheid van het gewicht k , bijv. $p^{\lambda_1 \dots \lambda_k}$

$$85.8 \quad \delta p^{\lambda_1 \dots \lambda_k} = dp^{\lambda_1 \dots \lambda_k} + \Gamma_{\mu \lambda_1}^{\lambda_1} p^{\mu \lambda_2 \dots \lambda_k} d\xi^{\mu} - \Gamma_{\mu \lambda_2}^{\lambda_2} p^{\lambda_1 \mu \lambda_3 \dots \lambda_k} d\xi^{\mu} - \dots - \Gamma_{\mu \lambda_k}^{\lambda_k} p^{\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} \mu} d\xi^{\mu}$$

Een X_{μ} met een lineaire overbrenging heet L_{μ} .

Covariante afgeleide.

Iedere covariante differentiaal is een overschuiving van $d\xi^{\mu}$ met een andere grootheid. Deze grootheid heet de covariante afgeleide en wordt met ∇_{μ} geschreven, bijv.

$$85.9 \quad \nabla_{\mu} v^{\lambda} = \partial_{\mu} v^{\lambda} + \Gamma_{\mu \lambda}^{\lambda} v^{\lambda}$$

$$85.10 \quad \nabla_{\mu} w_{\lambda} = \partial_{\mu} w_{\lambda} - \Gamma_{\mu \lambda}^{\lambda} w_{\lambda}$$

(Een andere schrijfwijze is $\omega_{\lambda;\mu}^{\nu}$, deze heeft het nadeel dat de differentieerende index aan den verkeerden kant komt).

Is de covariante afgeleide van een veld overal nul, dan heet het veld covariant constant, is die afgeleide ergens nul, dan heet het veld daar ter plaatse covariant stationair.

Symmetrie van een lineaire overbrenging

Uit de transformationijze van $\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}$ volgt

$$86.1 \quad \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\alpha'} = A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}$$

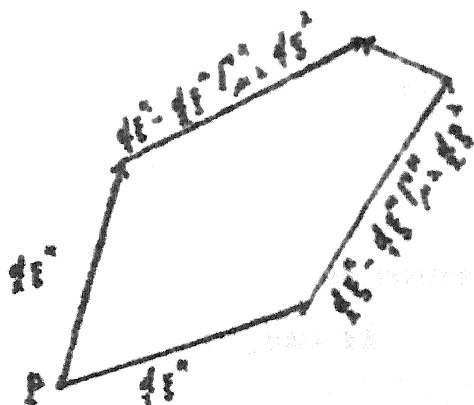
Daaruit volgt dat $\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}$ een affinor is. Voor dezen affinor schrijven we

$$86.2 \quad S_{\mu\lambda}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}$$

Is $S_{\mu\lambda}^{\alpha} = 0$, zoo heet de overbrenging symmetrisch. Kan men $S_{\mu\lambda}^{\alpha}$ in den vorm

$$86.3 \quad S_{\mu\lambda}^{\alpha} = S_{\mu}^{\alpha} A_{\lambda}^{\alpha}$$

schrijven, dan heet de overbrenging halfsymmetrisch.



Heeft men in P twee lynelementen $d\xi^\mu$ en $d\xi^\lambda$ en verplaatst men elk van deze pseudoparallel langs het andere, dan hebben de verplaatste vectoren de kentallen

$$d\xi^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu d\xi^\lambda$$

$$d\xi^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda d\xi^\mu$$

De sluitvector is dus

$$86.4 \quad d\xi^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu d\xi^\lambda - d\xi^\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\mu d\xi^\lambda = S_{\mu\lambda}^{\mu} d\xi^\lambda d\xi^\mu,$$

waaruit volgt

Er bestaan dan en alleen dan infinitesimale parallelogrammen in ieder punt in iederen stand, wanneer de overbrenging symmetrisch is

Is de overbrenging halfsymmetrisch, dan is

$$87.1 \quad \dots \dots \dots S_{\mu} A^{\mu} = S_{\nu} A^{\nu} = 0 \dots \dots$$

Er bestaan dan alleen infinitesimale parallelogrammen in het door bepaalde $m_1, m_2, \dots$ inkr hypervlak.

Zen X_{μ} met een symmetrische lineaire overbrenging, heet A_{μ}

Rotatie en Divergentie

Algemeen is

$$87.2 \quad \partial_{\mu} w_{\nu} = \partial_{\nu} w_{\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} w_{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} w_{\lambda} \dots \dots$$

Bij een symmetrische overbrenging is dus $\partial_{\mu} w_{\nu}$ onafhankelijk van de keuze van de overbrenging. Is w_{μ} een vector, dan is evenzoo voor $\partial_{\mu} w_{\nu} = 0$

$$87.3 \quad \partial_{\mu} w_{\nu_1 \dots \nu_p} = \partial_{\nu_1} w_{\mu \dots \nu_p} \dots \dots$$

Men noemt $\partial_{\mu} w_{\nu}$ en $\partial_{\mu} w_{\nu_1 \dots \nu_p}$ wel de rotatie van het veld w_{ν} resp. $w_{\nu_1 \dots \nu_p}$.

Is x^{μ} een contravariante vectordichtheid van het gewicht -1 , dan is

$$87.4 \quad \partial_{\mu} x^{\mu} = \partial_{\mu} x^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} x^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\mu} x^{\lambda} \\ = \partial_{\mu} x^{\mu} + 2 S_{\mu}^{\mu} x^{\mu}$$

Bij een symmetrische overbrenging is dus $\partial_{\mu} x^{\mu}$ onafhankelijk van de keuze van de overbrenging. Is x^{μ} een vectordichtheid van het gewicht -1 , dan is evenzoo voor

80.1

$$\nabla_{\alpha} u^{\alpha} = \nabla_{\alpha} u^{\alpha}$$

Men noemt $\nabla_{\alpha} u^{\alpha}$ en $\nabla_{\alpha} u^{\alpha}$ wel de divergentie van het veld resp. u^{α} .

Geodetische lijnen.

Rechte lijnen bestaan in een L_n niet. Men kan een kromme als zoo recht mogelijk beschouwen, wanneer de tangentiële vector langs de kromme bij pseudoparallele verplaatsing tangential blijft. Zulke krommen heeten geodetische lijnen der L_n .

Beschouw een kromme en lag op deze kromme of op een stuk ervan, op geheel willekeurige wijze, een continue schaalverdeling x . Bij iedere reële waarde van x (eventueel tusschen sekere grenzen) hoort dan één punt van de kromme. x heet een op de kromme gedefinieerde parameter. Nu is $\frac{dx}{ds}$ een tangentiële vector en de conditie voor geodetisch zijn is dat $\frac{dx}{ds}$ de richting van $\frac{dx}{ds}$ heeft dus

80.2

$$\frac{d}{ds} \frac{dx}{ds} = a(x) \frac{dx}{ds},$$

waar a de een of andere functie van x is. Het is jammer dat in deze vergelijking, die als de definitievergelijking der geodetische lijnen te beschouwen is, rechte de onbekende functie optreedt. Men kan nu de vraag stellen of men den parameter mischien door een anderen parameter t , functie van x , dus $t = t(x)$ kan vervangen, zóó, dat het rechter lid verdwijnt.

(80.1) laat zich omzetten in

80.3

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} \right) = a \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds}$$

of

80.4

$$\left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{dt}{ds} \frac{dx}{dt} = a \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds}$$

of ook

$$89. \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\left(\frac{d^2 \xi}{dx^2} - \frac{d^2 t}{dx^2} \right) \frac{d\xi}{dt}}{\left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2}$$

Het rechter lid wordt dus dan en alleen dan nul wanneer ξ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$89.2 \quad \frac{d^2 \xi}{dx^2} - \frac{d^2 t}{dx^2} = 0$$

waarvan de oplossing luidt

$$89.3 \quad \xi = C_1 \int e^{\int dx} dx + C_2$$

Hieruit volgt:

1. Er bestaan op iedere geodetische lijn parameters, t.o.v. waarvan de vergelijking der lijn luidt $\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0$ of, uitgeschreven

$$89.4 \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \int_{\mu}^{\mu} \frac{d\xi}{dt} \frac{d\xi}{dt} = 0$$

Men noemt deze parameters natuurlijke affine parameters (t heeft natuurlijk niets met den tijd te maken).

2. Heeft men één zoo'n natuurlijke parameter, bijv. ξ , dan is iedere andere in den vorm te schrijven

$$89.5 \quad t = C_1 \xi + C_2$$

(dit is een affine transformatie)

waarin C_1 en C_2 willekeurige constanten zijn.

Verandering van C_2 verlegt het oorsprongpunt, verandering van C_1 verandert de maat.

Op een geodetische lijn in L_n kan men dus weliswaar nog niet spreken van de lengte van het stuk, maar al wel van de lengteverhouding van twee verschillende stukken.

Uit de vergelijking (89.4) volgt, dat de ligging der geodetische lijnen onafhankelijk is van $S_{\mu\nu}^{(2)}$ en dat deze alleen afhangt van $S_{\mu\nu}^{(1)}$.

De 7.

Wordt in iedere lokaalruimte een fundamenteeltensor $g_{\mu\nu}$ van den Rang n ingevoerd (dus $\text{Det}(g_{\mu\nu}) \neq 0$), dan heet de X_n een V_n . In een V_n is aan iedere dx^μ een getal toegevoegd

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Is de $g_{\mu\nu}$ positief, resp. negatief definit, dan is dit getal steeds positief, resp. negatief. In de relativiteitstheorie hebben we steeds te maken met een fundamenteeltensor met de signatuur $(- - - +)$, zodat $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ zowel > 0 als < 0 kan zijn. De krommen, die voldoen aan de vergelijking

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0,$$

heeten nullijnen. Zij hebben in ieder punt een richting, die op den mantel van den plaatselijken nulkegel valt. Is $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu > 0$, dan schrijven we

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

De lijnen met $ds^2 > 0$ hebben tusschen twee punten een duur; deze lijnen hebben een tijdachtig karakter en kunnen wereldlijnen zijn van bewegende massapunten. $\int ds$ is de „eigentijd” langs de wereldlijn, d.i. de tijd die een meebewegende klok van nature zal aanwijzen.

Is $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu < 0$ dan schrijven we

$$ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

De lijnen met $ds^2 < 0$ hebben tusschen twee punten een lengte $\int ds$; deze lijnen hebben een ruimteachtig karakter en kunnen gelijktijdigheidslijnen zijn. $\int ds$ is de lengte die een langs de kromme gelegde meetband van nature zal aanwijzen.

Voorbeelden van verschillende ds^2

1) Poolcoördinaten in de gewone R_2 :

$$g_{1.1} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = dz^2 + r^2 d\theta^2$$

2) Poolcoördinaten in de Minkowskische R_2 :

$$-d\tau^2 = ds^2 = dx^2 - c^2 dt^2$$

$$g_{1.2} \quad \begin{cases} x = r \cosh \varphi & ; \quad dx = dr \cosh \varphi + r d\varphi \sinh \varphi \\ ct = r \sinh \varphi & ; \quad cdt = dr \sinh \varphi + r d\varphi \cosh \varphi \end{cases}$$

$$g_{1.3} \quad -d\tau^2 = ds^2 = dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

3) Bolcoördinaten op bol:

$$g_{1.4} \quad ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

4) Elliptische coördinaten in R_2 ^{zie blz. 75}:

$$\begin{aligned} g_{1.5} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 \right)^2 = \\ &= \left(\frac{+}{-} \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_1 + p}{\lambda_1 - p}} d\lambda_1, \frac{+}{-} \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_1 + p}{\lambda_2 + p}} d\lambda_2 \right)^2 + \left(\frac{+}{-} \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{p - \lambda_1}{\lambda_1 - p}} d\lambda_1, \frac{-}{+} \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_1 - p}{p - \lambda_2}} d\lambda_2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{4c^2} \left\{ \left(\frac{\lambda_1 + p}{\lambda_1 - p} + \frac{p - \lambda_1}{\lambda_1 - p} \right) d\lambda_1^2 + \left(\frac{\lambda_1 + p}{\lambda_2 + p} + \frac{\lambda_1 - p}{p - \lambda_2} \right) d\lambda_2^2 \right\} \\ &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4} \left\{ \frac{d\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - p^2} + \frac{d\lambda_2^2}{p^2 - \lambda_2^2} \right\} \end{aligned}$$

De overbrenging in een V_n .

We vragen nu of aan een V_n een bepaalde bevoorrechte lineaire overbrenging toekomt. Een natuurlijke eisch is, dat de lengte of duur van een vector niet zal veranderen bij pseudo-parallele verplaatsing. Wij eischen dus

$$g_{1.6} \quad \delta(v^\lambda v^\kappa g_{\lambda\kappa}) = 0$$

voor

$$g_{1.7} \quad \delta v^\kappa = 0$$

Daaruit volgt echter

$$g_{1.8} \quad 0 = 2g_{\lambda\kappa} v^\lambda \delta v^\kappa + v^\lambda v^\kappa \delta g_{\lambda\kappa} = v^\lambda v^\kappa \delta g_{\lambda\kappa}$$

en deze vergelijking moet gelden voor iedere keuze van ν^κ , waaruit volgt dat

$$g_{2.1} \quad \delta g_{\lambda\kappa} = d\xi^\mu \nabla_\mu g_{\lambda\kappa} = 0$$

is, voor iedere verplaatsing $d\xi^\mu$, dus

$$g_{2.2} \quad \nabla_\mu g_{\lambda\kappa} = 0$$

In woorden:

de covariante afgeleide van den fundamenteeltensor moet nul zijn

Is hieraan voldaan, dan volgt als bijresultaat:

De operatie ∇ en de operatie op- en neerhalen van indices zijn verwisselbaar: $\nabla_\mu \nu^\kappa = \nabla_\mu g^{\kappa\lambda} \nu_\lambda = g^{\kappa\lambda} \nabla_\mu \nu_\lambda$.

Eischen we bovendien dat de overbrenging symmetrisch is (d.w.z. dat er infinitesimale parallelogrammen in ieder punt en in iedere stand bestaan) dan hebben we voldoende voorwaarden om de $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$ te berekenen. Inderdaad is

$$g_{2.3} \quad 0 = \nabla_\mu g_{\lambda\kappa} = \partial_\mu g_{\lambda\kappa} - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa}^\rho g_{\lambda\rho}$$

en dus ook

$$0 = \partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\kappa} - \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho g_{\mu\rho},$$

$g_{2.4}$

$$0 = -\partial_\kappa g_{\mu\lambda} + \Gamma_{\kappa\mu}^\rho g_{\rho\lambda} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho g_{\mu\rho}.$$

Tellen we deze drie vergelijkingen op, dan volgt wegens $\Gamma_{[\mu\lambda]}^\kappa = 0$ en $g_{[\lambda\kappa]} = 0$

$$g_{2.5} \quad \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\kappa} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\lambda}),$$

of

$$g_{2.6} \quad \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = \frac{1}{2} g^{\kappa\rho} (\partial_\mu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\lambda}).$$

De uitdrukking rechts werd het eerst door Christoffel inge-

voerd (1869) en met $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \lambda \\ \kappa \end{smallmatrix} \right\}$ aangeduid (Christoffel-symbool).
Tegenwoordig schrijft men $\left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu \lambda \end{smallmatrix} \right\}$.

93.1
$$\left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu \lambda \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \lambda \\ \kappa \end{smallmatrix} \right\}$$

Hiermede is aangetoond, dat er in een V_n één en slechts één lineaire overbrenging bestaat die symmetrisch is en waarbij de covariante afgeleide van den fundamenteeltensor nul is

Lijnen van extreme lengte in een V_n

We willen bepalen of er in een V_n tussen twee gegeven punten verbindingslijnen bestaan van extreme lengte (dus óf korter óf langer dan alle andere verbindingslijnen.) Voor de afleiding hebben we het begrip „meealeepen van een veld” nodig:

Stel, er is in een X_n een veld gegeven, bijv. een vectorveld μ^κ . Verder zij gegeven een infinitesimaal verplaatsingsveld $v^\kappa dt$. Men kan aan dit laatste veld een meetkundige beteekenis geven, door zich voor te stellen, dat zich alle punten van de X_n over een afstand $v^\kappa dt$ verplaatsen. De X_n ondergaat daarbij dus een infinitesimale deformatie in zichzelf. Nu construeeren we naast μ^κ een nieuw veld. We voeren een nieuw coördinatenstelsel in, zoodanig, dat we aan elk verplaatst punt $\xi^\kappa + v^\kappa dt$ de oude coördinatenwaarden ξ^κ toekennen en aan het punt met de oude coördinaten ξ^κ de nieuwe coördinaten $\xi^{\kappa'} - v^{\kappa'} dt$. Noemen we die nieuwe coördinaten $\xi^{\kappa'}$ dan luidt dus de coördinatentransformatie

93.2
$$\xi^{\kappa'} = \delta_\lambda^{\kappa'} (\xi^\lambda - v^\lambda dt).$$

Bijgevolg is

$$A_{\lambda'}^{\kappa'} = \partial_{\lambda'} \xi^{\kappa'} = \delta_{\lambda'}^{\kappa'} (A_\lambda^\kappa - \partial_{\lambda'} v^\kappa dt)$$

93.3

$$A_{\lambda'}^{\kappa} = \delta_{\lambda'}^{\kappa} (A_\lambda^\kappa + \partial_{\lambda'} v^\kappa dt).$$

Dit proces noemen we „meeslepen van het coördinatensysteem over $v^{\alpha} dt$ ”. Nu voeren we het nieuwe veld naast u^{α} in. Van dit veld verlangen we, dat het ten opzichte van het nieuwe coördinatensysteem, precies de zelfde kentallen heeft, als het oude veld u^{α} ten opzichte van het oude stelsel. Dit proces noemen we „meeslepen van het veld u^{α} ”. Daar dit veld maar infinitesimaal van u^{α} verschillen zal, noemen we het $u^{\alpha} + \bar{d}u^{\alpha}$.

$\bar{d}u^{\alpha}$ is dus het verschil in veldwaarden (beide t.o.v. van het oude systeem), van het oude veld in ξ^{α} en het nieuwe veld in $\xi^{\alpha} + v^{\alpha} dt$. In het punt $\xi^{\alpha} + v^{\alpha} dt$ is dus de veldwaarde van dit nieuwe veld ten opzichte van het nieuwe stelsel

$$94.1 \quad u^{\alpha'} + \bar{d}u^{\alpha'} = \delta_{\alpha}^{\alpha'} u^{\alpha},$$

waar u^{α} de veldwaarde in ξ^{α} ten opzichte van het oude stelsel is. Dus is die veldwaarde t.o.v. van het oude stelsel

$$94.2 \quad u^{\alpha} + \bar{d}u^{\alpha} = A_{\alpha'}^{\alpha} \delta_{\alpha}^{\alpha'} u^{\alpha} = (A_{\alpha'}^{\alpha} + \partial_{\alpha} v^{\alpha'}) dt,$$

waaruit volgt

$$94.3 \quad \bar{d}u^{\alpha} = u^{\alpha'} \partial_{\alpha} v^{\alpha'} dt$$

Op dezelfde wijze kangetoonen dat voor een covariant velderveld geldt

$$94.4 \quad \bar{d}u_{\alpha} = -u_{\alpha'} \partial_{\alpha} v^{\alpha'} dt$$

en voor een affijn, bijv. $P^{\alpha\beta}_{\gamma}$

$$94.5 \quad \bar{d}P^{\alpha\beta}_{\gamma} = (P^{\alpha\beta}_{\gamma'} \partial_{\alpha} v^{\alpha'} + P^{\alpha\beta}_{\gamma} \partial_{\alpha} v^{\alpha'} - P^{\alpha\beta}_{\gamma} \partial_{\alpha'} v^{\alpha}) dt$$

De uitdrukking $\bar{d}u^{\alpha}$ is blijkbaar geen vector, want uit (94.1) volgt

$$\bar{d}u^{\alpha'} = u^{\alpha'} \partial_{\alpha} v^{\alpha'} dt = u^{\alpha} \partial_{\alpha} v^{\alpha'} dt.$$

$$= v^{\alpha} \partial_{\alpha} A^{\alpha'}_{\alpha} v^{\alpha} dt = A^{\alpha'}_{\alpha} \bar{d}u^{\alpha} + v^{\alpha} dt u^{\alpha} \partial_{\alpha} A^{\alpha'}_{\alpha}$$

Ik denk, we parametriseren als een netwerk van draden met bijgeschreven getallenwaarden in de ruimte, dan worden de parametriseringen van het nieuwe stelsel verkregen door dit netwerk met de draad-gehele getallenwaarden in elk punt over een afstand $v^{\alpha} dt$ (parallel met voor verschillende punten) te verschuiven.

25.

Nu geldt echter ^{voor} de gewone (niet covariante) differentiaal

$$95.1 \quad du^{\kappa'} = du^{\kappa} + u^{\kappa} v^{\lambda} dt \partial_{\lambda} A_{\kappa}^{\kappa'}$$

en daaruit volgt, omdat $\partial_{\mu} A_{\lambda}^{\kappa'}$ symmetrisch is in μ, λ :

$$95.2 \quad \oint_L u^{\kappa'} = (du^{\kappa'} - \tilde{d}u^{\kappa'}) = A_{\kappa}^{\kappa'} (du^{\kappa} - \tilde{d}u^{\kappa}) = A_{\kappa}^{\kappa'} \oint_L u^{\kappa}$$

We hebben dus een nieuwe covariante differentiaal gevonden, die meetkundig voorstelt, het verschil tussen plaatselijke en meegesleepte veldwaarde in $\xi^{\kappa} + v^{\kappa} dt$ en bijgevolg ook (differentialen van de tweede orde verwaarloozend) het verschil tussen deze beide veldwaarden in het punt ξ^{κ} zelf. Deze differentiaal heet de Liesche differentiaal. Voor een tensor $p_{\lambda\kappa}$ is dus bijv. de Liesche differentiaal

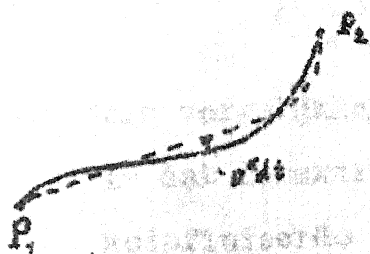
$$95.3 \quad \oint_L p_{\lambda\kappa} = (v^{\mu} \partial_{\mu} p_{\lambda\kappa} + p_{\mu\kappa} \partial_{\lambda} v^{\mu} + p_{\lambda\mu} \partial_{\kappa} v^{\mu}) dt$$

d.w.z. de veldwaarde van het meegesleepte veld in ξ^{κ} is

$$95.4 \quad \oint_{L, \kappa} p_{\lambda\kappa} = (v^{\mu} \partial_{\mu} p_{\lambda\kappa} + p_{\mu\kappa} \partial_{\lambda} v^{\mu} + p_{\lambda\mu} \partial_{\kappa} v^{\mu}) dt.$$

Is de Liesche differentiaal voor eenig veld bij de verplaatsing $v^{\kappa} dt$ nul, dan betekent dat, dat het veld bij het meesleepen in zich zelf overgaat en dus tegenover dat meesleepen invariant is.

We gaan nu in een $\mathcal{T}_n$ een kromme beschouwen, die twee punten P_1 en P_2 verbindt. Geeft men aan de punten van die kromme een kleine verplaatsing $v^{\kappa} dt$, die in P_1 en P_2 nul



is, dan ontstaat er een nieuwe kromme. Is de lengte $\int_{P_1}^{P_2} ds$ extreem dan is de variatie van de lengte bij de verplaatsing $v^{\kappa} dt$ nul.

Nu gebruiken we een truc, inplaats van de kromme te varieeren en het veld $p_{\lambda\kappa}$ met rust te laten, laten we de kromme met rust en sleepen het veld mee over $-v^{\kappa} dt$. Dit moet natuurlijk

precies hetzelfde effect op de lengte hebben. We weten al, dat de veldwaarde van het meegesleepte veld in ξ^k is

$$g_{\lambda\kappa} \# -\delta g_{\lambda\kappa} = g_{\lambda\kappa} + (v^\mu \partial_\mu g_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa} \partial_\lambda v^\mu + g_{\lambda\mu} \partial_\kappa v^\mu) dt$$

(+ teekens, omdat het meeslepen hier over $-v^\mu dt$ plaats heeft en dus is

$$\begin{aligned} g_{\lambda\kappa} \delta \int ds &= \delta \int (g_{\lambda\kappa} d\xi^\lambda d\xi^\kappa)^{\frac{1}{2}} \\ &= \int \frac{1}{2} (g_{\rho\sigma} d\xi^\rho d\xi^\sigma) \delta (g_{\lambda\kappa} d\xi^\lambda d\xi^\kappa) \end{aligned}$$

Maar nu is $\delta dx^\lambda = 0$ omdat de kromme rustig blijft liggen, dus

$$\begin{aligned} g_{\lambda\kappa} \delta \int ds &= + \frac{1}{2} \int (g_{\rho\sigma} d\xi^\rho d\xi^\sigma)^{-\frac{1}{2}} d\xi^\lambda d\xi^\kappa (v^\mu \partial_\mu g_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa} \partial_\lambda v^\mu + g_{\lambda\mu} \partial_\kappa v^\mu) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\xi^\lambda}{ds} \frac{d\xi^\kappa}{ds} (g_{\mu\kappa} \nabla_\lambda v^\mu - g_{\mu\kappa} \{ \lambda \rho \}^\mu v^\rho + g_{\mu\lambda} \nabla_\kappa v^\mu - g_{\mu\lambda} \{ \kappa \rho \}^\mu v^\rho \\ &\quad + v^\mu \partial_\mu g_{\lambda\kappa}) \\ &= \int \frac{d\xi^\lambda}{ds} \frac{d\xi^\kappa}{ds} \nabla_\lambda v_\kappa = \int \frac{d\xi^\kappa}{ds} \delta v_\kappa \end{aligned}$$

Nu kan men een partieele integratie toepassen

$$\begin{aligned} g_{\lambda\kappa} \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\xi^\kappa}{ds} \delta v_\kappa &= \int_{P_1}^{P_2} d \left(\frac{d\xi^\kappa}{ds} v_\kappa \right) - \int_{P_1}^{P_2} v_\kappa \delta \frac{d\xi^\kappa}{ds} \\ &= \int_{P_1}^{P_2} v_\kappa \delta \frac{d\xi^\kappa}{ds} \end{aligned}$$

waaruit volgt als noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor een extreme lengte (of duur)

$$g_{\lambda\kappa} \delta \frac{d\xi^\kappa}{ds} = 0$$

Uit deze vergelijking volgt:

- 1° dat de extreme lijnen in een V_n , tegelijk de op blz. 88 gedefinieerde rechtse of geodetische lijnen zijn;
- 2° dat de met behulp van $g_{\lambda\kappa}$ gemeten lengte (of duur), tegelijk een bij de overbrenging $\{ \mu \lambda \}^\kappa$ behorende natuurlijke affine parameter is.

Kromming.

Het lijnelement op een bol met straal 1 is

$$97.1 \quad ds^2 = \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2$$

Neem $\xi^1 = \varphi$, $\xi^2 = \theta$, dan is dus

$$97.2 \quad g_{11} = (\sin \xi^1)^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1,$$

$$g^{11} = \frac{1}{(\sin \xi^1)^2}, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = 1,$$

en bijgevolg

$$97.3 \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{11} = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \partial_2 g_{11} = \frac{\sin \xi^1 \cos \xi^1}{(\sin \xi^1)^2} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

$$\Gamma_{22}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \partial_2 g_{11} = -\sin \xi^1 \cos \xi^1 = -\sin \theta \cos \theta,$$

$$\Gamma_{12}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{22}^2 = 0,$$

zoodat

$$97.4 \quad \delta v^1 = dv^1 + v^2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\varphi + v^1 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta,$$

$$\delta v^2 = dv^2 - v^2 \sin \theta \cos \theta d\varphi.$$

Wordt v^k dus pseudoparallel verplaatst, dan is

$$97.5 \quad dv^1 = -v^2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\varphi - v^1 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

$$dv^2 = v^2 \sin \theta \cos \theta d\varphi$$

Langs een meridiaan $\varphi = \varphi_0$ is $d\varphi = 0$, dus

$$98.1 \quad \begin{aligned} dv^1 &= -v^1 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \\ dv^2 &= 0 \end{aligned}$$

en dus, zooals het behoort (lengte vector invariant bij pseudo-parallele verplaatsing)

$$\begin{aligned} 98.2 \quad d(v^1 v^1 g_{11} + v^2 v^2 g_{22}) &= 2v^1 g_{11} dv^1 + v^1 v^1 dg_{11} \\ &= -2v^1 v^1 \cos \theta \sin \theta d\theta + 2v^1 v^1 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Uit (98.1) volgt dat de meridianen geodetische lijnen zijn.

Langs een parallelcirkel $\theta = \theta_0$ is $d\theta = 0$ dus

$$\begin{aligned} 98.3 \quad dv^1 &= -v^1 \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} d\varphi \\ dv^2 &= v^1 \sin \theta_0 \cos \theta_0 d\varphi \end{aligned}$$

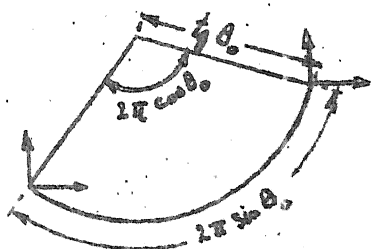
uit welke vergelijking volgt, dat de parallelcirkels geen geodetische lijnen zijn.

Is in een bepaald punt P van den parallelcirkel v^k gelegen in de tangente, dus $v^2 = 0$, dan zijn de kentallen van den over $d\varphi$ verplaatsten vector v^1 en $v^1 \sin \theta_0 \cos \theta_0 d\varphi$. De lengte van den vector $v^1, 0$ is $v^1 \sin \theta_0$, de lengte van den vector $0, v^1 \sin \theta_0 \cos \theta_0$ is $v^1 \sin \theta_0 \cos \theta_0$. De vector is dus gedraaid over een hoek $\cos \theta_0 d\varphi$. Aangezien alle vectoren bij een pseudoparallele verplaatsing over denzelfden hoek draaien, geldt dit voor een bijzonders vector afgeleide resultaat, voor alle vectoren. Gaat men langs den parallelcirkel heelemaal rond, dan is de hoek tusschen begin en eindstand $2\pi \cos \theta_0$. Vlak bij de pool is dus het verschil bijna 2π , aan den evenaar is het verschil 0. In een plat vlak zou de hoek 2π bedragen. Het verschil, dat afkomstig is van het gekromd zijn van het oppervlak,

is dus $2\pi(1 - \cos \theta_0)$ en dit is juist het oppervlak van de bolkap waarvan de parallelcirkel de rand is. Algemeen geldt op een bol met straal R :

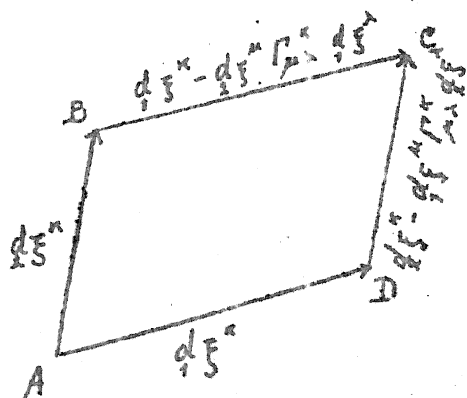
Is de omgrensde inhoud O , dan is de hoek tusschen begin en eindstand $2\pi - \frac{O}{R}$.

Brengt men een kegel aan, die den bol raakt in den parallelcirkel $\theta = \theta_0$ en slaat men dien kegel in een plat vlak uit dan ontstaat een cirkelsector met straal $tg \theta_0$ en hoek $2\pi \cos \theta_0$.



Daaruit volgt, dat de pseudoparallele verplaatsing lange den parallelcirkel op den bol en op den kegel dezelfde is

We gaan nu in een algemeene V_n berekenen wat een kontra-variante vector doet bij pseudoparallele verplaatsing lange een gesloten kromme. We nemen aan, dat de overgrenging symmetrisch is en er dus infinitesimale parallelogrammen bestaan. In zulk



een infinitesimaal parallelogram brengen we een vector eerst pseudoparallel van A naar C via B en dan van A naar C via D . In B is de veldwaarde van $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$ geworden

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + d\xi^\nu \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$$

en in D evenzoo $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + d\xi^\nu \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$

Derhalve is, als we beginnen met een vector v^κ in A , de pseudoparallel verplaatste vector in B

$$99.1 \quad v^\kappa - d\xi^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa v^\lambda,$$

in C via B

$$(99.2) \quad v^\kappa - d\xi^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa v^\lambda - (d\xi^\rho - d\xi^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho d\xi^\lambda)(\Gamma_{\rho\sigma}^\kappa + d\xi^\nu \partial_\nu \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa)$$

$$(v^\sigma - d\xi^\tau \Gamma_{\tau\eta}^\sigma v^\eta)$$

$$= v^\kappa - d_1 \xi^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa v^\lambda - d_1 \xi^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa v^\sigma + d_1 \xi^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa d_2 \xi^\tau \Gamma_{\tau\pi}^\sigma v^\pi - d_1 \xi^\rho d_2 \xi^\tau \partial_\nu \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa v^\nu$$

$$+ d_2 \xi^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho d_1 \xi^\lambda \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa v^\sigma + \text{termen van de derde orde}$$

$$= v^\kappa - d_1 \xi^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa v^\lambda - d_1 \xi^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa v^\lambda + d_1 \xi^\rho d_2 \xi^\mu (\Gamma_{\nu\rho}^\kappa \Gamma_{\mu\lambda}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\kappa) v^\lambda$$

en in C via D evenzoo (verwissel d_1 en d_2)

$$100.1 \quad v^\kappa - d_1 \xi^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa v^\lambda - d_2 \xi^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa v^\lambda + d_1 \xi^\rho d_2 \xi^\mu (\Gamma_{\nu\rho}^\kappa \Gamma_{\mu\lambda}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\kappa) v^\lambda$$

Het verschil tusschen de beide waarden is dus

$$d_1 \xi^\rho d_2 \xi^\mu \left\{ 2 \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + 2 \Gamma_{[\nu|\rho]}^\kappa \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \right\} v^\lambda$$

Daar dit een vector moet zijn en dit geldt voor iedere waarde van $d_1 \xi^\kappa$, $d_2 \xi^\kappa$ en v^κ , is de uitdrukking tusschen accolades een affinor. Deze affinor

$$100.3 \quad R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} = 2 \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + 2 \Gamma_{[\nu|\rho]}^\kappa \Gamma_{\mu\lambda}^\rho$$

heet de kromteaffinor van de overbrenging. Is de overbrenging Riemannsch, dan schrijven we $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}$.

Men kan tot $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}$ ook komen door een vector tweemaal kovariant te differentieeren en dan te alterneeren. In de onderstelling dat de overbrenging symmetrisch is, is

$$100.4 \quad \nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa = \partial_\nu (\nabla_\mu v^\kappa) - \Gamma_{\nu\mu}^\rho \nabla_\rho v^\kappa + \Gamma_{\nu\mu}^\kappa \nabla_\rho v^\rho$$

$$= \partial_\nu \partial_\mu v^\kappa + \partial_\nu (\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa v^\lambda) + \Gamma_{\nu|\lambda|}^\kappa \partial_\mu v^\lambda + \Gamma_{\nu|\lambda|}^\kappa \Gamma_{\mu\rho}^\lambda v^\rho$$

$$= \left\{ \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + \Gamma_{[\nu|\rho]}^\kappa \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \right\} v^\lambda + \Gamma_{\nu|\lambda|}^\kappa \partial_\mu v^\lambda - \Gamma_{\mu|\lambda|}^\kappa \partial_\nu v^\lambda$$

$$= \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} v^\lambda$$

Evenzoo vindt men

$$100.5 \quad \nabla_\nu \nabla_\mu w_\lambda = -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} w_\kappa$$

En voor een algemeen affinor, bijv. $\rho_{\lambda\rho}^\kappa$:

$$100.6 \quad \nabla_\nu \nabla_\mu \rho_{\lambda\rho}^\kappa = \frac{1}{2} R_{\nu\mu\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} \rho_{\lambda\rho}^\sigma - \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} \rho_{\sigma\rho}^\kappa - \frac{1}{2} R_{\nu\mu\rho}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} \rho_{\lambda\sigma}^\kappa$$

De identiteiten.

Voor den kromteaffinor bestaan eenige identiteiten. In de eerste plaats volgt uit de definitie de eerste identiteit

$$I) \quad R_{(\nu\mu)\lambda}^{\dots} = 0$$

Alterneert men over $\nu\mu\lambda$ dan volgt uit (100.3) bij een symmetrische overbrenging de tweede identiteit:

$$II) \quad R_{(\nu\mu)\lambda}^{\dots} = 0$$

Is de overbrenging Riemannsch, dan is

$$101.1 \quad R_{[\nu\mu]} g_{\lambda\kappa} = -\frac{1}{2} K_{\nu\mu\lambda}^{\dots} g_{\rho\kappa} - \frac{1}{2} K_{\nu\mu\kappa}^{\dots} g_{\lambda\rho}$$

en dit is de derde identiteit:

$$III) \quad K_{\nu\mu(\lambda\kappa)} = 0$$

Eindelijk volgt voor een Riemannsche overbrenging uit de tweede en derde identiteit

$$\begin{aligned} 102.2 \quad K_{\lambda\kappa\nu\mu} &= -K_{\kappa\nu\lambda\mu} - K_{\nu\lambda\kappa\mu} \\ &= +K_{\kappa\nu\mu\lambda} + K_{\nu\lambda\mu\kappa} \\ &= -K_{\nu\mu\kappa\lambda} - K_{\mu\kappa\nu\lambda} - K_{\lambda\mu\nu\kappa} - K_{\mu\nu\lambda\kappa} \\ &= 2K_{\nu\mu\lambda\kappa} + K_{\mu\kappa\lambda\nu} + K_{\lambda\mu\kappa\nu} \\ &= 2K_{\nu\mu\lambda\kappa} - K_{\kappa\lambda\mu\nu} \end{aligned}$$

en dit is de vierde identiteit

$$IV) \quad K_{\lambda\kappa\nu\mu} = K_{\nu\mu\lambda\kappa}$$

De kromteaffinor van een Riemannsche overbrenging is alterneerend in $\nu\mu$ en $\lambda\kappa$ en bovendien tengevolge van IV symmetrisch voor de groepen $\nu\mu$ en $\lambda\kappa$. We hebben hier dus met een grootheid te maken, die een soort van tensor is, maar een tensor voor bivectoren. Men noemt dergelijke grootheden bivectortensoren. Het aantal kentallen zou dus zijn

$$102.1 \quad \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n-1)}{2} \right\} \left\{ \frac{n(n-1)}{2} + 1 \right\} = \frac{1}{8} (n^2 - n)(n^2 - n + 2)$$

Daarbij is al rekening gehouden met de identiteiten I, II en IV. Men bewijst nu gemakkelijk, dat II met het oog op I, III en IV vervangen mag worden door de identiteit

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$$

en dat zijn $\binom{n}{2} = \frac{1}{2} (n^2 - n)$ vergelijkingen. Er blijven dus slechts

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} (n^2 - n) (3n^2 - 9n + 6 - n^2 + 5n - 6) = \\ & = \frac{1}{24} (n^2 - n) (2n^2 + 2n) = \frac{1}{12} (n^2 - n^2) = \frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1) \end{aligned}$$

voor $n=4$ is dit aantal dus 20.

Voor de eerste kovariante afgeleide van den kromteaffinor $R_{\alpha\beta}$ bestaat een identiteit die naar Bianchi genoemd is en voor een symmetrische overbrenging luidt:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$$

We kunnen dit door gebruik te maken van de volgende hulpstelling:

Bij een symmetrische overbrenging kan men het coördinatenstelsel zoo kiezen dat de $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ en de gesymmetriseerde afgeleiden $\nabla_{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} = \nabla_{\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}$ enz. in een bepaald van te voren aan te wijzen punt P (maar dan ook in het algemeen nergens anders) nul worden.

Een zoodanig coördinatenstelsel (over een bepaald punt P is er slechts één), heet in P genormaliseerd.

Van de reeksontwikkeling van deze normaalcoördinaten in ξ^{α} geven we hier de eerste termen

$$102.3 \quad \xi^{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\kappa} \left\{ \left(\xi^{\kappa} - \xi^{\kappa}_0 \right) + \frac{1}{2} \left(\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \right)_{\xi=\xi_0} \left(\xi^{\mu} - \xi^{\mu}_0 \right) \left(\xi^{\lambda} - \xi^{\lambda}_0 \right) + \dots \right\}$$

Indedaad is dan

$$103.7 \quad A_{\lambda}^{\kappa'} = \frac{\partial \xi^{\kappa'}}{\partial \xi^{\lambda}} = \delta_{\lambda}^{\kappa'} + \frac{1}{2} \delta_{\lambda}^{\kappa'} (\Gamma_{\sigma\rho}^{\kappa})_{\xi^{\sigma}, \xi^{\rho}} \{ (\xi^{\rho} - \xi^{\sigma}) A_{\lambda}^{\sigma} + (\xi^{\sigma} - \xi^{\rho}) A_{\lambda}^{\rho} \}$$

en dus in ξ^{κ}

$$103.8 \quad A_{\lambda}^{\kappa'} = \delta_{\lambda}^{\kappa'}$$

verder

$$103.9 \quad \partial_{\mu} A_{\lambda}^{\kappa'} = \frac{1}{2} \delta_{\lambda}^{\kappa'} (\Gamma_{\sigma\rho}^{\kappa})_{\xi^{\sigma}, \xi^{\rho}} \{ A_{\lambda\mu}^{\sigma\rho} + A_{\mu\lambda}^{\sigma\rho} \} + \dots$$

en dus in ξ^{κ}

$$103.10 \quad \partial_{\mu} A_{\lambda}^{\kappa'} = A_{\mu\lambda}^{\kappa'} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$$

en daaruit volgt in ξ^{κ}

$$103.11 \quad \begin{aligned} \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} &= A_{\kappa\mu'\lambda'}^{\kappa'\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - A_{\mu'\lambda'}^{\kappa'\mu\lambda} \partial_{\mu} A_{\lambda}^{\kappa'} \\ &= A_{\kappa\mu'\lambda'}^{\kappa'\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - A_{\kappa\mu'\lambda'}^{\kappa'\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = 0 \end{aligned}$$

Men kan $\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\kappa'}$ in de ~~omgeving~~ van ξ^{κ} ontwikkelen in een reeks naar $\xi^{\kappa} - \xi^{\kappa}$. Het begin van deze reeks is

$$103.12 \quad \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} = \frac{2}{3} (\xi^{\mu'} - \xi^{\mu}) R_{\mu(\mu\lambda)}^{\kappa'} + \dots$$

De verdere termen bevatten meer dan één factor $(\xi^{\mu'} - \xi^{\mu})$ en verder grootheden die zich laten vormen uit de kovariante afgeleiden van $R_{\mu\lambda}^{\kappa}$. Wij kunnen nu de identiteit van Bianchi gemakkelijk bewijzen.

Ten opzichte van een stelsel van normaalcoördinaten in P is

$$103.13 \quad \begin{aligned} \partial_{\sigma} R_{\mu\lambda}^{\kappa} &= \partial_{\sigma} R_{\mu\lambda}^{\kappa} - \partial_{\sigma} \partial_{\mu} \Gamma_{\lambda\lambda}^{\kappa} + (\partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}) \Gamma_{\lambda\lambda}^{\kappa} \\ &\quad + \Gamma_{\sigma\mu\lambda}^{\kappa} \partial_{\sigma} \Gamma_{\lambda\lambda}^{\kappa} = 0 \end{aligned}$$

en aangezien men dit voor ieder punt kan doen, is $\partial_{\sigma} R_{\mu\lambda}^{\kappa}$ indedaad overal nul.

Uit den kromteaffinor leidt men door vouwen naar $\mu\kappa$ een nieu-
wen affinor af, den affinor van Ricci

$$104.1 \quad R_{\mu\lambda} = R^{\dots\kappa}_{\mu\lambda}$$

Bij een Riemannschen overbrenging schrijven we $K_{\mu\lambda}$:

$$104.2 \quad K_{\mu\lambda} = K^{\dots\kappa}_{\mu\lambda}$$

Hier is deze affinor een tensor, die tensor van Ricci genoemd wordt. Inderdaad volgt uit de vierde identiteit:

$$104.3 \quad K^{\dots\kappa}_{\mu\lambda} = K^{\kappa}_{\mu\lambda} = K^{\dots\kappa}_{\mu\lambda}$$

Uit $K_{\mu\lambda}$ kan men een scalar afleiden

$$104.4 \quad K = g^{\mu\lambda} K_{\mu\lambda}$$

$\frac{1}{n(n-1)} K$ (voor $n=4$ dus $\frac{1}{2} K$) heet de scalaire kromming van de V_n

Uit de Bianchische identiteit volgt door vouwen naar $\mu\kappa$

$$104.5 \quad \rho_{\mu} R_{\mu\lambda} + \rho_{\lambda} R^{\dots\kappa}_{\mu\lambda} - \rho_{\kappa} R_{\mu\lambda} = 0$$

of

$$VI) \quad 2 \rho_{\mu} R_{\mu\lambda} = \rho_{\kappa} R^{\dots\kappa}_{\mu\lambda}$$

Bij een Riemannsche overbrenging hebben we dus

$$104.6 \quad 2 \rho_{\mu} K_{\mu\lambda} = \rho_{\kappa} K^{\dots\kappa}_{\mu\lambda}$$

Wordt deze laatste vergelijking overschoven met $g^{\mu\lambda}$, dan ontstaat

$$104.7 \quad \rho_{\mu} K - \rho^{\mu} K_{\mu\mu} = \rho^{\kappa} K_{\mu\kappa}$$

Voert men nu een nieuwe tensor in

$$104.8 \quad G_{\mu\kappa} = K_{\mu\kappa} - \frac{1}{2} K g_{\mu\kappa}$$

dan laat zich die betrekking eenvoudig schrijven

$$\text{VII} \quad \nabla^\mu g_{\mu\lambda} = 0$$

Men noemt $\nabla^\mu g_{\mu\lambda}$ wel eens de divergentie van den tensor $g_{\mu\lambda}$.
Uitgeschreven is VII:

$$105.1 \quad \nabla^\mu g_{\mu\lambda} = \nabla_\mu g^{\mu\lambda} = \partial_\mu g^{\mu\lambda} + \Gamma^\mu_{\mu\rho} g^{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g^{\mu\rho}$$

Het is voor de relativiteitstheorie van het grootste belang,
dat er in een Riemannsche ruimte vanzelf, d.w.z. uit den aard
der meetkunde in die ruimte, een tensor bestaat, waarvan de di-
vergentie nul is.

Als voorbeeld berekenen we $K_{\mu\nu\lambda}$ voor een bol met
straal 1. Het kentel $K_{12,12}$ bepaalt alles, omdat hier $n=2$ is.
We hadden (blz. 97)

$$105.1 \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\sin \theta \cos \theta$$

Bijgevolg is

$$105.2 \quad K_{12,1}^{\dots 2} = \partial_1 \Gamma_{2,1}^2 - \partial_2 \Gamma_{1,1}^2 + 2 \Gamma_{1,1}^2 \Gamma_{2,1}^1 + 2 \Gamma_{1,1}^2 \Gamma_{1,1}^2$$

$$= 0 + \frac{\partial(\sin \theta \cos \theta)}{\partial \theta} - \sin \theta \cos \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + 0$$

$$= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$= -\sin^2 \theta$$

en dus

$$105.3 \quad K_{12,12} = K_{12,1}^{\dots 2} g_{12} = -\sin^2 \theta$$

Hieruit volgt

$$105.4 \quad K_{11} = K_{1,1}^{\dots 1} = \sin^2 \theta$$

$$K_{22} = K_{2,2}^{\dots 1} = K_{2,2,1}^{\dots 1} g^{11} = 0$$

$$K_{12} = 0$$

en

$$106.1 \quad K = g^{11} K_{11} + g^{22} K_{22} = 1 + 1 = 2$$

zoodat de kromming wordt

$$106.2 \quad \frac{1}{2} K = 1$$

zooals het ook behoort bij een bol van straal 1.

Het gravitatieveld in de klassieke mechanica.

In de klassieke mechanica is een gravitatieveld in elk geval altijd conservatief. Er bestaat dus een arbeidsvermogen van plaats (of potentiaal) P en

$$106.3 \quad K_x = - \frac{\partial P}{\partial x}$$

Hebben we een gravitatieveld, afkomstig van één massapunt, dan is

$$106.4 \quad P = - \frac{f_m}{r}; \quad \bar{K} = - \nabla P = - f_m \frac{\vec{r}}{r^3}; \quad \text{f. gravitatieveld}$$

Daaruit volgt dat

$$106.5 \quad -(\nabla \cdot \nabla) P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \nabla \cdot \bar{K} = 0 \quad (x, y, z \neq 0)$$

Maar deze vergelijking geldt ook voor een gravitatieveld afkomstig van meerdere massapunten, omdat de totale potentiaal de som is van alle afzonderlijke potentialen, en de vergelijking (106.5) geldt dus ook voor een algemeen veld, maar alleen in die punten van het veld waar zich geen massa bevindt. Is er wel massa aanwezig, dan zal dus het rechter lid van (106.5) een waarde krijgen, die van de massaverdeeling afhangt. De zwaartekracht binnen een bol met straal R om O , homogeen met massa van een dichtheid μ gevuld, is

$$106.6 \quad \bar{K} = - \frac{4}{3} \pi \mu \vec{r}$$

en de potentiaal is dus

$$107.1 \quad P = \frac{2}{3} \pi \rho f r^2.$$

Hieruit volgt:

$$107.2 \quad -\rho \cdot P = \rho \cdot K = -\frac{4}{3} \pi \rho r^2 = -4 \pi \rho f.$$

Het is nu gemakkelijk in te zien dat de vergelijking

$$107.3 \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 4 \pi \rho$$

altijd geldt, ook voor niet homogene massaverdeling. Want in een bepaald punt zal de grootste bijdrage voor P afkomstig zijn van de materie in een kleine omgeving om P , en ten opzichte van die bijdrage (r komt in den noemer voor) zal de rest te verwaarlozen zijn. We komen dus tot deze conclusie:

In de klassieke mechanica is de gravitatiekracht de afgeleide van een potentiaal en voor deze potentiaal geldt de vergelijking van Laplace met een rechter lid dat alleen afhangt van de plaatselijke dichtheid van de materie en nul is voor punten waar zich geen materie bevindt.

Gravitatieveld ontstaande door afwijking van de $g_{\lambda\kappa}$ van de waarden ± 1 , -1 en c .

Indien de $g_{\lambda\kappa}$ overal de waarden

$$107.4 \quad \dot{g}_{11} = \dot{g}_{22} = \dot{g}_{33} = -\dot{g}_{44} = -1 ; \dot{g}_{\lambda\kappa} = 0 \text{ voor } \lambda \neq \kappa$$

hebben, hebben we te maken met een gewoone Minkowskische R_4 met een orthogonaal cartesisch coördinatenstelsel. We beschouwen nu een ruimtetijdwereld met een coördinatenstelsel t.o. waarvan de $g_{\lambda\kappa}$ slechts weinig van de $\dot{g}_{\lambda\kappa}$ verschillen (eerste onderstelling)

$$107.5 \quad g_{\lambda\kappa} = \dot{g}_{\lambda\kappa} + \varepsilon_{\lambda\kappa}$$

en dat de waarnemer het coördinatenstelsel ξ^{α} als zijn beschouwt.

De wereldlijn van een massapunt moet van het coördinatenstelsel onafhankelijk zijn en kan dus alleen een geodetische lijn zijn:

$$100.1 \quad \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau}$$

$$100.2 \quad c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Verder nemen we aan, dat de snelheid van het massapunt klein is t.o.v. van de lichtsnelheid, dat wil dus hier zeggen dat de richting van de wereldlijn niet in de nabijheid van den plaatselijken nulkegel van $g_{\alpha\beta}$ ligt. (tweede onderstelling)

Daar

$$100.3 \quad c^2 = - \left(\frac{d\xi^1}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{d\xi^2}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{d\xi^3}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{d\xi^4}{d\tau} \right)^2 + \xi_{\lambda\kappa} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} \frac{d\xi^\kappa}{d\tau}$$

is dan $\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}$, $\alpha=1,2,3$ een kleine grootheid en $\frac{1}{c} \frac{d\xi^4}{d\tau}$ een grootheid die weinig van 1 verschilt.

XX
XX

Tenslotte nemen we aan, dat $\xi_{\lambda\kappa}$ slechts langzaam in den tyd τ verandert vergeleken met de verandering in de ^{ruimte} (derde onderstelling).

Recapitulatie der onderstellingen:

1. $\xi_{\lambda\kappa}$ klein.
2. snelheid massapunt klein t.o.v. van c .
3. $\xi_{\lambda\kappa}$ verandert langzaam in den tijd.

Dan is $\partial_\mu \xi_{\lambda\kappa}$ te verwaarloozen t.o.v. van $\partial_\mu \xi_{\lambda\kappa}$, $\alpha=1,2,3$.

We rekenen nu $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$ uit en verwaarloozen daarbij grootheden die van de tweede orde klein zijn. Aangezien

$$100.4 \quad \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = \frac{1}{2} g^{\kappa\rho} (\partial_\mu g_{\rho\lambda} + \partial_\lambda g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\lambda\mu}) \\ = \frac{1}{2} g^{\kappa\rho} (\partial_\mu \xi_{\rho\lambda} + \partial_\lambda \xi_{\rho\mu} - \partial_\rho \xi_{\lambda\mu})$$

$$103.1 \quad - \Gamma_{\lambda\lambda}^{\alpha} \frac{d\bar{x}^{\lambda}}{d\tau} \frac{d\bar{x}^{\alpha}}{d\tau} = - \Gamma_{44}^{\alpha} \frac{d\bar{x}^4}{d\tau} \frac{d\bar{x}^{\alpha}}{d\tau} = - c^2 \Gamma_{44}^{\alpha}$$

is $(\bar{x}^4 = ct)$

$$103.2 \quad \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \bar{x}^{\alpha}}{d\tau^2} = - \Gamma_{44}^{\alpha} = - \frac{1}{2} \partial_{\alpha} g_{44} = - \frac{1}{2} \partial_{\alpha} g_{44} \quad \alpha = 1, 2, 3$$

zoodat $\frac{1}{2} c^2 g_{44}$ hier de rol speelt van de gravitatiepotentiaal in de vergelijking van de versnelling van een massapunt met massa 1. In eerste benadering bepaalt dus het veld van de componenten g_{44} alleen de beweging van een massapunt.

We moeten nu nog zien ook in de algemeene theorie de $g_{\alpha\alpha}$ vast te leggen aan de massaverdeeling. Voor de gravitatiepotentiaal bestond een vergelijking van de tweede orde

$$103.3 \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho = 4\pi\mu f$$

We moeten dus verwachten dat er differentiaalvergelijkingen van de tweede orde in de $g_{\alpha\alpha}$ bestaan, waarvan de rechter zijde iets bevat dat van de materie in den meest algemeenen zin van het woord dus van massa's en electromagnetische velden afhangt. Deze differentiaalvergelijkingen moeten natuurlijk den invarianten vorm hebben en moeten er 10 zijn, omdat er 10 onbekenden zijn, n.l. de $g_{\alpha\alpha}$. De keuze is dus niet erg groot. Komitanten van $g_{\alpha\alpha}$ die alleen van de afgeleiden van $g_{\alpha\alpha}$ tot de tweede orde afhangen, zijn alleen $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $K_{\alpha\beta}$, K en $g_{\alpha\alpha}$ zelf en functie's van deze grootheden. $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$ zelf komt als hebbende 20 kentallen niet in aanmerking. Practisch blijft alleen de mogelijkheid, dat links een tensor (10 kentallen) komt te staan, die uit $K_{\alpha\beta}$, K en $g_{\alpha\alpha}$ is opgebouwd en die nul moet worden op plaatsen waar materie en electromagnetisch veld ontbreken. Rechts moet er een tensor komen te staan, die voor materie en electromagnetisch veld karakteristiek is

De electromagnetische impulsenergietensor.

Voor het electromagnetische veld is die tensor aangewezen. De vergelijkingen van Maxwell laten zich n.l. in algemeen covarianten vorm schrijven. De vergelijking (46.25)

$$10.1 \quad \boxed{\partial_\mu F_{\lambda\kappa} - \partial_\lambda F_{\mu\kappa} = 0}$$

heeft den invarianten vorm al (verg. 87.3). De vergelijking (46.25) voor cartesische coördinaten in een R_4 kan ook geschreven worden

$$10.2 \quad \partial_j F^{ik} = -\delta^{ik}$$

$$10.3 \quad F^{ik} = g^{ij} F^{jk}; \quad \delta^{ik} = g^{ij} \delta^{jk}, \quad g = -\det(g_{ik}) > 0$$

want g is in deze coördinaten een constante. Voor algemeene coördinaten is g een dichtheid van het gewicht +1 en F^{ik} en δ^{ik} zijn dus respectievelijk een bivectordichtheid en een vectordichtheid van het gewicht +1. De vergelijking (10.2) heeft dus nu den algemeen covarianten vorm en kan geschreven worden (verg. 88.1)

$$10.4 \quad \boxed{\partial_\mu F^{\mu\kappa} = \partial_\mu F^{\mu\kappa} = -\delta^{\mu\kappa}}$$

Uit F leiden we als op blz. 55 den tensor

$$10.5 \quad S^{\kappa\lambda} = -F^{\kappa}_{\mu} F^{\lambda\mu} + \frac{1}{4} g^{\kappa\lambda} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

af. Dan gaat de uitdrukking voor den vierdimensionalen krachtvector (55.6) over in

$$10.6 \quad k^\kappa = -\partial_\mu S^{\mu\kappa}$$

De materiele impuls-energietensor.

We moeten nu een dergelijken tensor voor de materie afleiden. Is ρ de rustdichtheid van de materie, dan is het eenvoudigste tensorveld dat zich laat vormen

$$10.7 \quad T^{\kappa\lambda} = \rho \frac{dx^\kappa}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt}$$

Nemen we eens aan dat we in een Minkowskische R_4 zijn met gewone Coördinaten $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = ct$. Dan is het verband tusschen rustmassa en massa (60.5)

$$III.1 \quad \dot{m} = m \sqrt{1-\beta^2} = m \frac{d\tau}{dt}$$

Nu wordt echter een rustend volume, beoordeeld door een waarnemer met snelheid u in de bewegingsrichting, verkort gezien met een factor $\sqrt{1-\beta^2}$. Dientengevolge zijn de volumina waardoor we m resp. $\dot{m}$ moeten deelen om de gewone dichtheid μ resp. $\dot{\mu}$ te krijgen, niet dezelfde, zoodat

$$III.2 \quad \dot{\mu} = \mu \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2$$

Dit geeft, ingevuld in (110.7) (cartesisch orthogonaal coördinatenstelsel)

$$III.3 \quad T^{li} = \dot{\mu} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} = \mu \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^i}{dt} \quad [Dim. ML^{-1}T^{-2}]$$

Stel nu dat we materie met atomistische structuur hebben, waarvan de deeltjes snelheden hebben die veel van elkaar verschillen. 1) Dan zullen we voor $\frac{dx^l}{d\tau}$, dat is dus voor u^1, u^2, u^3, c in elk punt zekere middelwaarden moeten nemen over een zeker gebied, waarvan het zwaartepunt in het beschouwde punt ligt. Zij de snelheid van dat zwaartepunt u^p en de snelheid van een deeltje t.o.v. van het zwaartepunt v^p dan is

$$III.4 \quad u^p = u^p + v^p$$

en de uitdrukking μv^p verdwijnt bij sommatie over het heele gebied. In de uitdrukking

$$III.5 \quad \mu u^p u^q = \mu u^p_0 u^q_0 + \mu v^p v^q + (\mu u^p v^q + \mu v^p u^q)$$

1) Verg. Eddington, The mathematical Theorie of Relativity, p. 116 e.v.

verdwijnen dus bij de sommatie de termen tusschen de haakjes. De vorm $\sum_{\mu} v^{\mu} v^2$ verdwijnt echter niet. Neem bijv. $\sum_{\mu} v^1 v^2$, welke uitdrukking voor een waarnemer, die met het zwaartepunt meebeweegt gelijk is aan $\sum_{\mu} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}$. Door een oppervlakje $dx dx$ stroomen per tijdseenheid de deeltjes aanwezig in een volume $dx dx \frac{dy}{dt}$ en deze hebben samen een x -impuls $\mu dx dx \frac{dy}{dt}$. Per tijdseenheid en oppervlakte eenheid is er dus in de y -richting een strooming van de x -impuls groot $\mu \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}$. Bijgevolg stelt $\sum_{\mu} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}$ voor de gemiddelde stroomingsdichtheid in de y -richting van den x -impuls. Daar impulsverandering per tijdseenheid kracht is, heeft dus $\sum_{\mu} v^1 v^2$ de beteekenis van een spanning in de x -richting in het xx -vlak of ook van kracht per oppervlakte-eenheid, dat is een spanning (schuifspanning) in de y -richting in het yx -vlak. Noemen we deze spanningen p^{12} (p^{11} is dus een druk- of trekspanning), dan heeft nu T^{12} de volgende matrix

$$\begin{array}{cccc}
 p^{11} + \mu u_0^1 u_0^1 & p^{12} + \mu u_0^1 u_0^2 & p^{13} + \mu u_0^1 u_0^3 & \mu c u_0^1 \\
 p^{12} + \mu u_0^1 u_0^2 & p^{22} + \mu u_0^2 u_0^2 & p^{23} + \mu u_0^2 u_0^3 & \mu c u_0^2 \\
 p^{13} + \mu u_0^1 u_0^3 & p^{23} + \mu u_0^2 u_0^3 & p^{33} + \mu u_0^3 u_0^3 & \mu c u_0^3 \\
 \mu c u_0^1 & \mu c u_0^2 & \mu c u_0^3 & \mu c^2
 \end{array}$$

Aan de zijden van de matrix treedt (met een factor c) de vierdimensionale impulsvector $\mu u_0^1, \mu u_0^2, \mu u_0^3, \mu c$ op (verg. blz. 61), waarvan de impulsdichtheidsvector $\mu u_0^1, \mu u_0^2, \mu u_0^3$ de ruimtelijke komponente is ¹⁾.

~~per tijdseenheid de deeltjes stroomen aanwezig in een volume~~

~~en de energie is~~

~~hebben~~

~~in de richting~~

1) Op blz. 61 in (61.5a) moet staan $m \frac{dx^{\mu}}{dt}$ in plaats van $m \frac{dx^{\mu}}{dt}$, immers $\frac{\dot{m}}{m} = \frac{dt}{dt}$.

De factor c maakt dat de impulsenergietensor der materie dezelfde physische dimensie krijgt als die van het electromagnetische veld (verg. blz. 57). Aangezien door $dx dy dz$ per tijds-eenheid de deeltjes stroomen aanwezig in een volume $dx dy dz \frac{dt}{dt}$ en deze een energie $\mu dx dy dz \frac{dy}{dt} c^2$ hebben, is er in de y richting een strooming van energie per oppervlakte-eenheid groot $\mu c^2 \frac{dy}{dt}$. De impulsvector is dus gelijk aan c^2 maal den energiestroomvector (verg. blz. 61).

Gaan we nu na of de divergentie $\partial_k T^{ki}$ van den impulsenergietensor verdwijnt, evenals in het electro-dynamische geval. Nemen we $i = 4$ dan is

$$113.1 \quad \frac{1}{c^2} \partial_k T^{k4} = \frac{\partial(\mu g)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu \frac{y}{t})}{\partial y} + \frac{\partial(\mu \frac{z}{t})}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

en dit is de bekende "continuïteitsvergelijking" der hydrodynamica. Voor $i = 1$ ontstaat

$$113.2 \quad \partial_k T^{k1} = \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{21}}{\partial y} + \frac{\partial p^{31}}{\partial z} + \frac{\partial(\mu p^{11} \frac{x}{t})}{\partial x} + \frac{\partial(\mu p^{21} \frac{y}{t})}{\partial y} + \frac{\partial(\mu p^{31} \frac{z}{t})}{\partial z} + \frac{\partial(\mu \frac{x}{t})}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{21}}{\partial y} + \frac{\partial p^{31}}{\partial z} + \mu \left(\frac{x}{t} \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{y}{t} \frac{\partial p^{21}}{\partial y} + \frac{z}{t} \frac{\partial p^{31}}{\partial z} + \frac{\partial \frac{x}{t}}{\partial t} \right)$$

of

$$= \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{21}}{\partial y} + \frac{\partial p^{31}}{\partial z} + \mu \frac{d \frac{x}{t}}{dt} = 0$$

$$113.3 \quad \mu \frac{d \frac{x}{t}}{dt} = - \partial_q p^{q1} \quad ; \quad p, q = 1, 2, 3$$

en dit is de bekende vergelijking (elastische kracht = massa maal versnelling) uit de elasticiteitsleer voor het geval er geen uitwendige krachten werken. Het verdient te worden opgemerkt, dat μc^2 de energie per volume-eenheid is die zou ontstaan indien de geheele materie in energie omgezet zou worden F (~~$9 \cdot 10^{10}$ erg = negenduizend biljoen kgm per seconde per gram materie~~) en dat T^{11} dus bij normale elastische spanningen en kleine snelheden veel en veel grooter is dan alle andere componenten van T^{ki} . In het algemeene geval is

$$113.4 \quad h = - \partial_k T^{k1}$$

F (9.10¹⁰ erg = 25 millioen K.W.uur per gram materie)

de vierdimensionale krachtvector der materie. $k \neq 0$ wil zeggen, dat er in (113.2) uitwendige krachten optreden en in (113.1) een verandering van de massa door toegevoerde energie.

De gravitatievergelijkingen van Einstein.

Stel nu dat er behalve mechanische ~~en~~ ^{geen} electromagnetische verschijnselen ~~andere~~ verschijnselen in de natuur bestaan, dan zijn alle „uitwendige“ krachten in het electromagnetische van mechanischen aard en omgekeerd. Voor het totale mechanisch-electromagnetische verschijnsel bestaan er dan geen uitwendige krachten, d.w.z. de divergentie van de som van $S^{\kappa\lambda}$ en $T^{\kappa\lambda}$ moet nul zijn. Schrijven we nu dus voor dezen totalen tensor $T^{\kappa\lambda}$ dan moet in algemeene coördinaten gelden

$$114.1 \quad \nabla_{\mu} T^{\mu\lambda} = 0$$

en deze vergelijking moet het behoud van totalen impuls en totale energie voorstellen. Inderdaad is

$$114.2 \quad \nabla_{\mu} T^{\mu\lambda} = \partial_{\mu} T^{\mu\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\mu\rho} T^{\rho\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} T^{\mu\rho}$$

en de vergelijking (114.1) gaat bij gebruik van normaalcoördinaten in eenig punt (blz. 102) over in

$$114.3 \quad \partial_{\mu} T^{\mu\lambda} = 0,$$

de gewone vorm der impuls-energievergelijking.

Deze totale tensor $T^{\kappa\lambda}$ is de eenvoudigste die wij aan de rechterzijde van de gezochte differentiaalvergelijking voor de $g_{\lambda\kappa}$ kunnen verwachten. Links moet dus een tensor met louter meetkundige beteekenis komen te staan, afgeleid uit $K_{\mu\lambda}^{\dots\kappa}$, $K_{\mu\lambda}$ en K en de divergentie van dezen tensor moet nul zijn. Inderdaad hebben we nu zoo'n tensor, namelijk $G_{\mu\lambda}$. De eenvoudigst denkbare vorm van de gravitatievergelijkingen is dus

$$115.1 \quad g_{\mu\lambda} = K_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} K g_{\mu\lambda} = \frac{\kappa}{c^2} T_{\mu\lambda} \quad ^1)$$

hierin is κ een constante, die we zullen berekenen. Daartoe nemen we weer het gravitatieveld van blz. 107 waarbij de $g_{\lambda\lambda}$ weinig van -1 , -1 , -1 , $+1$ verschillen. De vergelijking (115.1) laat zich ook schrijven

$$115.2 \quad K_{\mu\lambda} = \frac{\kappa}{c^2} (T_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} T g_{\mu\lambda}) ; \quad T = T_{\lambda\lambda} g^{\lambda\lambda}$$

Ten opzichte van de componenten $T_{44} = \mu c^2$ (verg. blz. 112) zijn alle verdere componenten in eerste benadering te verwaarlozen. De belangrijkste van alle vergelijkingen (115.2) is dus

$$115.3 \quad K'_{44} = \frac{\kappa}{c^2} T_{44} - \frac{1}{2} \frac{\kappa}{c^2} T g_{44} = \frac{\kappa}{c^2} T_{44} - \frac{1}{2} \frac{\kappa}{c^2} T_{44} g^{\lambda\lambda} g_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{c^2} T_{44} = \frac{1}{2} \kappa \mu$$

Nu is

$$115.4 \quad K_{\mu\lambda} = 2 \partial_{[\mu} \Gamma_{\lambda]}^{\kappa} + 2 \Gamma_{[\mu}^{\kappa} \Gamma_{\lambda]}^{\rho}$$

dus

$$115.5 \quad K_{44} = 2 \partial_{[4} \Gamma_{4]}^{\kappa} + 2 \Gamma_{[4}^{\kappa} \Gamma_{4]}^{\rho}$$

en in deze vergelijking kan alles verwaarloosd worden behalve

$$115.6 \quad K_{44} = \partial_{\alpha} \Gamma_{44}^{\alpha} = \partial_{\alpha} \Gamma_{44}^{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Ingevolge (92.6) is dus

$$115.7 \quad K_{44} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} g_{44} = \frac{1}{2} \Delta g_{44} ; \text{ dimensie } [L^{-2}]$$

en dus volgt voor de uitdrukking $\frac{1}{2} c^2 g_{44}$, die de rol van potentiaal spelen moet

$$115.8 \quad \Delta \left(\frac{1}{2} c^2 g_{44} \right) = \frac{1}{2} c^2 \kappa \mu ; \text{ dim. } [T^{-2}]$$

1) Men vindt dikwijls de formule $g_{\mu\lambda} = \kappa T_{\mu\lambda}$, deze ontstaat wanneer men $c=1$ stelt en dus een andere eenheid van tijd neemt, of ook indien men $T_{\mu\lambda}$ anders normiert (dimensie $[M L^{-3}]$ = massadichtheid).

(P is potentiaal per eenheid v. massa)

We weten echter (blz. 107) dat voor de potentiaal P geldt

$$116.1 \quad \Delta P = 4\pi f \rho, \text{ dimensie } [T^{-2}]$$

waarin f de gravitatieconstante van Newton is ¹⁾ en dus volgt voor de gravitatieconstante κ van Einstein

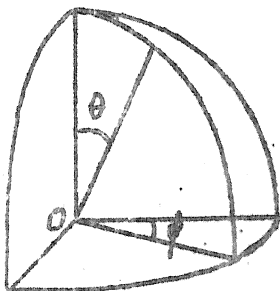
$$116.2 \quad \kappa = \frac{8\pi f}{c^2} = 307 \cdot 10^{-27}, \text{ dimensie } [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

Inderdaad leert nu (115.8) dat de gravitatievergelijking van Einstein in het grensgeval overgaat in de vergelijking $\Delta P = 4\pi f \rho$ der klassieke mechanica, zoals het correspondentieprincipe dat verlangt.

Het gravitatieveld van een rustend massapunt.

Van een rustend massapunt mogen we verwachten dat het gravitatieveld bolsymmetrie heeft. Is er geen massapunt, dan is de dr^2 euclidisch, dus in t en gewone bolcoördinaten:

$$116.3 \quad c^2 dt^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$



Nu brengen we het massapunt in O en verlangen dat de bolsymmetrie bewaard blijft. Dan moet $c^2 dr^2$ dus noodzakelijk den vorm hebben

$$116.4 \quad c^2 dr^2 = f(r) c^2 dt^2 - g(r) dr^2 - h(r) (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

waar f , g en h willekeurige functies van r zijn. In plaats van r voeren we nu in een coördinaat r' :

$$116.5 \quad r^2 = r'^2 h(r')$$

dan krijgt de uitdrukking den vorm

$$116.6 \quad c^2 dr'^2 = f(r') c^2 dt^2 - h(r') dr'^2 - r'^2 d\theta^2 - r'^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$1) f = 6.7 \cdot 10^{-8}, \text{ dimensie } [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

$$\frac{g^2 \cdot \text{cm}^3}{\text{kg} \cdot \text{sec}^2} = \frac{10^{-3} \cdot 10^3}{10^{-3} \cdot 10^6} = 10^{-3}$$

Voor de functies $k(r')$ en $l(r')$ schrijven we e^κ en e^λ en voor r' eenvoudigheidshalve weer r ; dan wordt

$$117.1 \quad c^2 dx^2 = e^\kappa e^\lambda dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

en bijgevolg

$$117.2 \quad g_{11} = e^\lambda, \quad g_{22} = -e^\lambda, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{44} = e^\kappa$$

wanneer r , θ , φ en ct als ξ^1 , ξ^2 , ξ^3 , ξ^4 genomen worden en

$$117.3 \quad -g = e^{\kappa+\lambda} r^4 \sin^2 \theta$$

Nu gaan we de 40 uitdrukkingen $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$ uitrekenen. Het blijkt dat er 31 nul zijn en dat voor de overige 9 geldt

$$117.4 \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \lambda' ; \lambda' = \frac{d\lambda}{dr} \\ \Gamma_{12}^1 &= -r e^{-\lambda} \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \\ \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} e^{\kappa-\lambda} \kappa' ; \kappa' = \frac{d\kappa}{dr} \\ \Gamma_{12}^2 &= r^{-1} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta \\ \Gamma_{44}^4 &= \frac{1}{2} \kappa' ; \kappa' = \frac{d\kappa}{dr} \end{aligned}$$

De vector e_1^κ ligt langs de parameterlijnen van r . Daar

$$117.5 \quad e_1^\mu \nabla_\mu e_1^\kappa = \partial_1 e_1^\kappa + \Gamma_{11}^\kappa = \Gamma_{11}^\kappa = \Gamma_{11}^1 e_1^\kappa = \lambda' e_1^\kappa$$

zijn de parameterlijnen geodetisch. De van O uitgemeten lengte langs zoo'n straal tusschen $r=r_1$ en $r=r_2$ is $\int_{r_1}^{r_2} e^{\lambda/2} dr$, hieruit volgt dat r niet de natuurlijk gemeten afstand tot O is.

De vector e_4^κ ligt langs de parameterlijnen van ct . Daar

$$117.6 \quad e_4^\mu \nabla_\mu e_4^\kappa = \partial_4 e_4^\kappa + \Gamma_{44}^\kappa = \Gamma_{44}^\kappa = \Gamma_{44}^4 e_4^\kappa = \frac{1}{2} e^{\kappa-\lambda} \kappa' e_4^\kappa$$

volgt dat deze parameterlijnen in het algemeen niet meer geodetisch zijn, d.w.z. dat een massapunt in het gravitatieveld niet in rust blijft t.o.v. van het ruimtelijk coördinatenstelsel r, θ, φ .

Nu waren de functies $\kappa(r)$ en $\lambda(r)$ nog willekeurig. Zij moeten zoo bepaald worden dat

1^o $G_{\mu\lambda} = 0$ overal, behalve in de lijn van het gravitatiecentrum

2^o $c^2 dr^2$ nadert tot een euklidisch lijnelement voor groote waarden van r , d.w.z. λ en κ naderen tot 0 voor $r = \infty$.

De berekening leert, dat alleen G_{11} , G_{22} , G_{33} , en G_{44} niet voor iedere waarde van λ en κ nul worden. Voor deze componenten vindt men

$$\begin{aligned} G_{11} &= -\frac{2}{r^2} \Gamma_{11}' + \Gamma_{11}' \Gamma_{11}' + \Gamma_{12}' \Gamma_{12}' + \Gamma_{13}' \Gamma_{13}' + \Gamma_{14}' \Gamma_{14}' + \frac{2}{r^2} \log \sqrt{g} - \Gamma_{11}^{'2} \frac{2}{r^2} \log \sqrt{g} \\ 118.1 \quad G_{22} &= -\frac{2}{r^2} \Gamma_{22}' + 2 \Gamma_{22}' \Gamma_{21}' + \Gamma_{23}' \Gamma_{23}' + \frac{2}{r^2} \log \sqrt{g} - \Gamma_{22}' \frac{2}{r^2} \log \sqrt{g} \\ G_{33} &= -\frac{2}{r^2} \Gamma_{33}' - \frac{2}{r^2} \Gamma_{33}' + 2 \Gamma_{33}' \Gamma_{31}' + 2 \Gamma_{33}' \Gamma_{32}' - \Gamma_{33}' \log \sqrt{g} - \Gamma_{33}'^2 \frac{2}{r^2} \log \sqrt{g} \\ G_{44} &= -\frac{2}{r^2} \Gamma_{44}' + 2 \Gamma_{44}' \Gamma_{41}' - \Gamma_{44}' \frac{2}{r^2} \log \sqrt{g} \end{aligned}$$

en daaruit volgt na substitutie

$$\begin{aligned} 118.2 \quad a) \quad G_{11} &= \frac{1}{2} \kappa' - \frac{1}{4} \lambda' \kappa' + \frac{1}{4} \kappa'^2 - \frac{\lambda'}{2} = 0 \\ b) \quad G_{22} &= e^{-\lambda} \left\{ 1 + \frac{1}{2} r (\kappa' - \lambda') \right\} - 1 = 0 \\ c) \quad G_{33} &= \sin^2 \theta \cdot e^{-\lambda} \left\{ 1 + \frac{1}{2} r (\kappa' - \lambda') \right\} - \sin^2 \theta = 0 \\ d) \quad G_{44} &= e^{\kappa - \lambda} \left(-\frac{1}{2} \kappa'' + \frac{1}{4} \lambda' \kappa' - \frac{1}{4} \kappa'^2 - \frac{\kappa'}{r} \right) = 0 \end{aligned}$$

(c) volgt uit (b). Uit (a) en (d) volgt $\kappa' = -\lambda'$ en daar beide in het oneindige nul moeten zijn

$$118.3 \quad \kappa = -\lambda$$

Den gaat (b) over in

$$\text{11g.1} \quad e^{\kappa} (1 + 2 \kappa') = e^{\kappa} + 2 \frac{d e^{\kappa}}{d r} = 1$$

waaruit bij integratie volgt

$$\text{11g.2} \quad e^{\kappa} = 1 - \frac{\alpha}{r} \quad (\alpha \text{ heeft de dimensie } [L])$$

waarin α een integratieconstante is waaraan we voorloopig nog geen fysische betekenis hechten. Substitutie van deze oplossing in (a), d.w.z. in

$$\text{11g.3} \quad \frac{1}{2} \kappa'' + \frac{1}{2} \kappa'^2 + \frac{\kappa'}{r} = 0$$

leert dat ook aan deze vergelijking voldaan is.

Daarmede hebben we een oplossing gevonden van den vorm

$$\text{11g.4} \quad c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Dit lijnelement verliest zijn betekenis voor $r = \alpha$.

Wereldlijnbeweging

We zullen de betekenis van α nagaan. De vergelijking van een geodetische lijn is

$$\text{11g.5} \quad \frac{d^2 \xi^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} \frac{d\xi^{\lambda}}{d\tau} \frac{d\xi^{\sigma}}{d\tau} = 0$$

Deze vergelijking staat voor de vier vergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \lambda' \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - r e^{-\lambda} \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} e^{2\kappa} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} &= 0 \\ c \frac{d^2 t}{d\tau^2} + c \kappa' \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} &= 0 \end{aligned}$$

Nemen we nu een deeltje, dat in den aanvang beweegt in het

vlak $\theta = \frac{\pi}{2}$, met een snelheid u , dan is $\cos \theta = 0$ en $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$.

Daaruit volgt $\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = 0$ en θ blijft dus constant en gelijk aan $\frac{\pi}{2}$. Verder is $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1 - \frac{u^2}{c^2}$. Voor de wereldlijn van het deeltje geldt:

$$\text{11g.7} \quad \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \kappa' \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - r e^{2\kappa} \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{1}{2} e^{2\kappa} c^2 \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$$

120.1

$$\frac{d^2 A}{d\tau^2} + \kappa \frac{dr}{d\tau} \frac{dA}{d\tau} = 0 \quad \left(\text{N.B. } \kappa \frac{dr}{d\tau} = \frac{d\kappa}{d\tau} \right)$$

De twee laatste vergelijkingen laten zich onmiddellijk eenmaal integreren en geven dan de twee eerste integralen

$$a) \quad r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = C_1$$

120.2

$$b) \quad \frac{dA}{d\tau} = C_2 e^{-\kappa} = \frac{C_2}{1 - \frac{a}{r}}$$

waar C_1 en C_2 integratieconstanten zijn. We zouden nu de eerste vergelijking moeten integreren. In plaats daarvan nemen we liever de vergelijking

$$120.3 \quad 1 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2, \quad \left(\text{N.B. } \theta = \frac{\pi}{2}, d\theta = 0 \right)$$

die evenzoo een eerste integraal is en elimineeren. Elimineeren we $d\tau$ en dA met behulp van de andere twee eerste integralen (120.2), dan ontstaat

$$120.4 \quad \frac{C_2}{c r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{C_1^2}{c^2 r^2} = C_2^2 - 1 + \frac{a}{r} + \frac{a}{r} \frac{C_1^2}{c^2 r^2},$$

of voor $r = \frac{1}{\rho}$

$$120.5 \quad \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2 = c^2 \frac{C_2^2 - 1}{C_1^2} + \frac{c^2 a}{C_1^2} \rho + a \rho^3.$$

Differentiatie ^{naar} van φ geeft

$$120.6 \quad \boxed{\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{\frac{1}{2} a C^2}{C_1^2} + \frac{3}{2} a \rho^2} \quad (\text{Dimensie: } [L^{-1}])$$

waarnaast we nog eens de eerste integraal (120.4) beschouwen, nu in den vorm

$$120.7 \quad \boxed{r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{C_1}{\sqrt{1 - \frac{a}{r}}}}; \quad (\text{Dim.: } [L^2 T^{-1}]).$$

Vergelijken we nu deze beide vergelijkingen (120.6) en (120.7) met de vergelijkingen voor een deeltje ~~met massa~~ in een gravitatieveld van een massa m in O , bewegend in het vlak $\theta = \frac{\pi}{2}$.

In de klassieke mechanica is

$$121.1 \quad \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = - \frac{f m}{r^2} \quad (m = \text{massa attractiecentrum};$$

$$121.2 \quad r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} = 0 \quad f = \text{gravitatieconstante v. Newton}).$$

waarin r de betekenis heeft van den gewonen voerstraal. Twee eerste integralen zijn

$$121.3 \quad \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = 2 \frac{f m}{r} \quad \text{constante (energiwet); } [L^2 T^{-2}]$$

$$121.4 \quad \boxed{r^2 \dot{\varphi} = h} \quad = \text{constant (perkenwet); } [L^2 T^{-1}]$$

Met behulp van (121.4) zetten we (121.3) om in een differentiaalvergelijking, die alleen r en φ bevat:

$$121.5 \quad h^2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + h^2 r^3 = 2 f m r + C \quad ; \quad r = \frac{1}{\rho}$$

en hier werken we de constante uit door differentiatie naar φ

$$121.6 \quad \boxed{\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{f m}{h^2}} \quad ; \quad [L^{-1}]$$

Voor kleine snelheden ($u \ll c$) en grooten afstand van het attractie-centrum moeten de vergelijkingen (120.6) en (120.7) overgaan in de klassieke vergelijkingen (121.6) en (121.4). Uit (120.7) en (121.4) volgt dus

$$121.7 \quad c_1 = h$$

en uit (120.6) en (121.6) (de term met ρ^3 is te verwaarloozen):

$$121.8 \quad \frac{1}{2} \frac{dc^2}{d\varphi^2} = \frac{f m}{h^2}$$

of

$$121.9 \quad d = 2 \sqrt{\frac{f m}{c^2}}$$

Voor de zon is

$$121.10 \quad \begin{aligned} m &= 399 \cdot 10^{33} & [M] \\ f &= 6,7 \cdot 10^{-8} & [M^{-1} L^3 T^{-2}] \\ c &= 3,00 \cdot 10^{10} & [L T^{-1}] \\ d &= 2,94 \cdot 10^6 = 2,94 \text{ K.M.} & [L] \end{aligned}$$

Voor de aarde is

$$122.1 \quad \alpha = 2,45 \quad \approx 4,6 \text{ mm}$$

We hebben hier zonder meer de γ uit de klassieke mechanica geïdentificeerd met de γ in (120.7), hoewel de natuurlijk geselecteerde afstand in werkelijkheid $\int \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}}}$ bedraagt. Nu is echter

$$122.2 \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}}} = r_2 \sqrt{1-\frac{\alpha}{r_2}} - r_1 \sqrt{1-\frac{\alpha}{r_1}} - \alpha \log \frac{\{r_2 + r_2(1-\frac{\alpha}{r_2})\} \{r_1 - r_1(1-\frac{\alpha}{r_1})\}}{\{r_2 - r_2(1-\frac{\alpha}{r_2})\} \{r_1 + r_1(1-\frac{\alpha}{r_1})\}}$$

voor $r_1 > \alpha$ en $r_2 > \alpha$, en deze uitdrukking is voor groote waarden van r_1 en r_2 (t.o.v. van α) in eerste benadering gelijk aan $r_2 - r_1$.

De vergelijking

$$122.3 \quad \frac{d^2 p}{d\varphi^2} + p = \frac{1}{2} \alpha \frac{c^2}{h^2} + \frac{3}{2} \alpha p^3$$

is de differentiaalvergelijking van de baan. Als eerste benadering nemen we de oplossing van

$$122.4 \quad \frac{d^2 p}{d\varphi^2} + p = \frac{1}{2} \alpha \frac{c^2}{h^2}$$

De oplossing van de gereduceerde vergelijking

$$122.5 \quad \frac{d^2 p}{d\varphi^2} + p = 0$$

is van den vorm

$$122.6 \quad p = \frac{1}{2} \alpha \frac{c^2}{h^2} + e \cos(\varphi - \beta)$$

en hierbij komt voor het rechter lid een B.I. $\frac{1}{2} \alpha \frac{c^2}{h^2}$, zoodat de oplossing van (122.4) luidt:

$$122.7 \quad p = \frac{1}{2} \alpha \frac{c^2}{h^2} (1 + e \cos(\varphi - \beta))$$

Dit is een kegelsnede. We onderstellen, dat we met een ellips te maken hebben: $e < 1$. De integratie constanten e en β hebben de beteekenis van excentriciteiten waarde van φ voor het perihelium. De afstand van centrum tot perihelium resp.

aphelium is $\frac{2k^2}{\alpha c^2(1+e)}$ resp. $\frac{2k^2}{\alpha c^2(1-e)}$ en de groote as is dus $2a = \frac{4k^2}{\alpha c^2(1-e^2)}$. Deze eerste benadering wordt in den tweeden term van het rechter lid van (122.3) gesubstitueerd. (122.3) gaat dan over in

$$\begin{aligned} 123.1 \quad \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho &= \frac{1}{2} \alpha \frac{c^2}{k^2} + \frac{3}{8} \alpha^3 \frac{c^4}{k^4} \left(1 + 2e \cos(\varphi - \beta) + \frac{1}{2} e^2 (1 + \cos 2(\varphi - \beta)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha \frac{c^2}{k^2} + \frac{3}{16} \alpha^3 \frac{c^4}{k^4} (1 + e^2) + \frac{3}{4} \alpha^3 \frac{c^4}{k^4} e \cos(\varphi - \beta) + \frac{3}{16} \alpha^3 \frac{c^4}{k^4} e^2 \cos 2(\varphi - \beta) \end{aligned}$$

De B.I., die hier aan de oplossing der gereduceerde vergelijking moet worden toegevoegd, is gemakkelijk te berekenen. De term met $\cos(\varphi - \beta)$ is in resonantie en levert in de B.I. een term met $\varphi \sin(\varphi - \beta)$. Voor de totale oplossing vinden we

$$\begin{aligned} 123.2 \quad \rho &= \frac{1}{2} \alpha \frac{c^2}{k^2} (1 + e \cos(\varphi - \beta)) + \frac{3}{16} \alpha^3 \frac{c^4}{k^4} (1 + e^2) + \frac{3}{8} \alpha^3 \frac{c^4}{k^4} e \varphi \sin(\varphi - \beta) - \\ &\quad - \frac{1}{16} \alpha^3 \frac{c^4}{k^4} e^2 \cos 2(\varphi - \beta) \\ &= \frac{1}{2} \alpha \frac{c^2}{k^2} \left(1 + \frac{3}{8} \alpha^2 \frac{c^2}{k^2} (1 + e^2) \right) \left(1 + e \cos(\varphi - \beta) + \frac{3}{4} \alpha^2 \frac{c^2}{k^2} e \varphi \sin(\varphi - \beta) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha \frac{c^2}{k^2} \cdot \frac{1}{8} \alpha^2 \frac{c^2}{k^2} e^2 \cos 2(\varphi - \beta) \\ &= \frac{1}{2} \alpha \frac{c^2}{k^2} \left(1 + \frac{3}{8} \alpha^2 \frac{c^2}{k^2} (1 + e^2) \right) \left\{ 1 + e \cos(\varphi - \beta) \right\} - \frac{1}{2} \alpha \frac{c^2}{k^2} \cdot \frac{1}{8} \alpha^2 \frac{c^2}{k^2} e^2 \cos 2(\varphi - \beta) \end{aligned}$$

waar

$$\xi = \mu \cdot \varepsilon = \frac{3}{4} \alpha^2 \frac{c^2}{k^2} \varphi \ll 1$$

123.3

$$e = \left\{ 1 + \frac{3}{8} \alpha^2 \frac{c^2}{k^2} (1 + e^2) \right\} e'$$

Aangezien $\frac{\alpha^2 c^2}{k^2} = \frac{2\alpha}{a(1-e^2)}$ is voor de planeten inderdaad $\frac{\alpha^2 c^2}{k^2} \ll 1$ want $\alpha \ll a$. De eerste term stelt, wanneer we eerst eens van ξ afzien, een ellips voor met excentriciteit e' (weinig verschillend van e) en een periheliumafstand weinig verschillend van $\frac{2k^2}{\alpha c^2(1+e)}$. De tweede term stelt een kleine schommeling met de dubbele periode voor, die dus de baan iets van een ellips doet afwijken, maar de richting van centrum tot perihelium niet met den tijd doet veranderen. Het optreden van ξ in den eersten term maakt echter, dat de voerstraal

van het perihelium langzaam draait. Het maximum van $\frac{1}{r}$ treedt namelijk op voor $\varphi - \beta = \beta, \beta + 2\pi, \dots$ dus telkens wanneer $\varphi(1 - \frac{3}{4}\alpha^2 \frac{c^2}{f^2})$ met 2π is toegenomen, d.w.z. wanneer φ is toegenomen met $2\pi(1 + \frac{3}{4}\alpha^2 \frac{c^2}{f^2})$. Voor de planeet Mercurius geeft dit een vooruitlopen van het perihelium met 42.9 seconde per eeuw. De werkelijk waargenomen afwijking (die verkregen wordt nadat alle klassiek-mechanische correcties voor de storingen door andere planeten zijn aangebracht) bedraagt volgens Newcomb 41.24 seconde met een nauwkeurigheid van ± 2.09 seconde.¹⁾

We leiden nog een andere formule af voor de periheliumafwijking. Klassiek geldt voor den omlooptijd $T = \frac{2\pi}{\sqrt{f_m}} a \sqrt{a}$ en dus ingevolge (121.9):

$$124.1 \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{f_m c^2}} a \sqrt{a}$$

en daaruit volgt voor de periheliumafwijking $2\pi \frac{\delta}{\varphi}$ per omloop

$$124.2 \quad 2\pi \frac{\delta}{\varphi} = 2\pi \frac{3}{4} \alpha^2 \frac{c^2}{f^2} = \frac{3\pi \alpha}{a(1-e^2)} = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1-e^2)}$$

waarin alleen halve groote as, omlooptijd en excentriciteit voorkomen.

Lichtstraalafwijking. Voor een lichtstraal is $dr = 0$ en dus tengevolge van (120.1a) $e, = \infty$. De vergelijking (120.6) gaat dus over in

$$124.3 \quad \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{3}{2} \alpha \rho^2$$

Nemen we weer als eerste benadering een oplossing van de gereduceerde vergelijking en wel de kromme

$$124.4 \quad \rho = \frac{\cos \varphi}{R}$$

die t.o.v. van de poolcoördinaten ρ, φ een „rechte lijn” is op

1) Enc. der Math. Wis. VI 2.22 a, F. Kottler.

een afstand $\frac{1}{R}$ van het centrum, dan kunnen we hier wel van een integratieconstante β afzien (vgl. (122b)) aangezien het er toch niet toe doet in welke richting de lichtstraal langs de zon gaat. Deze oplossing gesubstitueerd in het rechter lid van (124.3) geeft de vergelijking

$$125.1 \quad \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{1}{2} \alpha \frac{\cos^2 \varphi}{R^2}$$

met de B.I. $\frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi)$ en dus met de oplossing

$$125.2 \quad \rho = \frac{\cos \varphi}{R} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} (2 - \cos^2 \varphi)$$

De maximale waarde van ρ is $\frac{1}{R} (1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{R})$ voor $\varphi = 0$. ρ wordt 0 voor

$$125.3 \quad \cos \varphi = \frac{R}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{R^2}{\alpha^2} + 2}$$

de eerste wortel is > 1 voor $\frac{\alpha}{R} \ll 1$ en dus onbruikbaar, de andere is in eerste benadering

$$125.4 \quad \frac{R}{\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + 2 \frac{\alpha^2}{R^2}} \right) = \frac{R}{\alpha} \left(1 - 1 + \frac{\alpha^2}{R^2} \right) = \frac{\alpha}{R}$$

We hebben dus twee asymptotische richtingen:

$$125.5 \quad \cos \varphi_1 = \frac{\alpha}{R} \quad ; \quad \sin \varphi_1 = +1$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{\alpha}{R} \quad , \quad \sin \varphi_2 = -1$$

en de hoek tussen deze beide bedraagt

$$125.6 \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha}{R}$$

Voor een lichtstraal die langs de oppervlakte van de zon voorbyschiet is $\alpha = 2.94 \cdot 10^5$ en $R = 697 \cdot 10^8$ waaruit volgt

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 1.75 \text{ seconde. De gemeten waarden zijn}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sobral expeditie} \quad 1.98 \pm 0.12 \\ \text{Principe expeditie} \quad 1.61 \pm 0.30 \end{array} \right\} \text{ seconde. 1)}$$

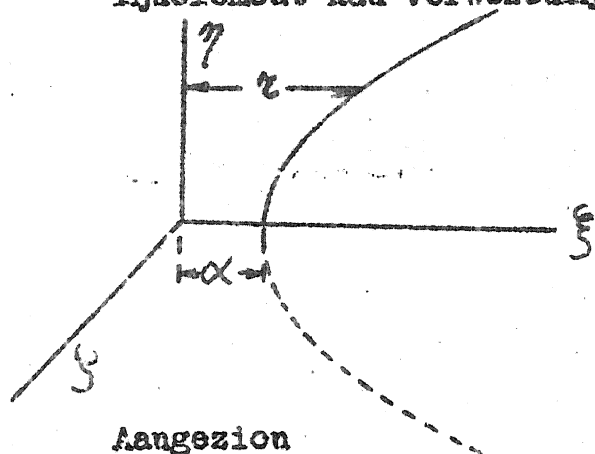
1) Enc. d. Math. Wiss. VI 2, 22a, F. Kottler.

Het ruimtelijk lijnelement om de zon.

Voor $t = \text{constant}$ krijgen we het ruimtelijk lijnelement

$$126.1 \quad ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

L. Flamm heeft aangetoond hoe men een ruimte met een dergelijk lijnelement kan verwezenlijken. Neem in de gewone ruimte een ge-



woon rechthoekig assenstelsel ξ, η, ζ en beschouw in het $\xi\eta$ -vlak den parabool

$\eta^2 = 4a(\xi - \alpha)$

$$126.2 \quad \eta^2 = 4a(\xi - \alpha)$$

die de ξ -as snijdt in $\xi = \alpha$.

Aangezien

$$126.3 \quad 2\eta d\eta = 4a d\xi$$

is het lijnelement van de parabool

$$126.4 \quad ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = d\xi \sqrt{1 + \frac{16a^2}{16a(\xi - \alpha)}} = d\xi \sqrt{\frac{\xi}{\xi - \alpha}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\xi}}}$$

Laat men dus deze parabool wentelen om de η -as, dan is het lijnelement voor het ontstane omwentelingsoppervlak

$$126.5 \quad ds^2 = \frac{dz^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + r^2 d\varphi^2$$

wanneer φ de hoek van wenteling is gemeten vanaf het $\xi\eta$ -vlak en z de afstand tot de η -as. Neemt men nu nog een vierde as χ , loodrecht op ξ, η en ζ en laat men het omwentelingsoppervlak nogmaals wentelen om het $\eta\zeta$ -vlak, dan is het lijnelement voor het driedimensionale omwentelingsoppervlak dat in de $\xi\eta\zeta\chi$ -ruimte ontstaat

$$126.6 \quad ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

wanneer θ de tweede hoek van wenteling is gemeten vanaf de

73 χ - ruimte. De ruimte om het gravitatiecentrum van $r = \alpha$ tot $r = \infty$ beeldt zich dus volkomen maatgetrouw af op de helft van dit hyperoppervlak, die ontstaat uit de bovenste (of ook de onderste) helft van de parabool.

Men moet nu natuurlijk vooral niet denken dat de baan van een massapunt of een lichtstraal in deze driedimensionale ruimte geodetisch zou zijn. Eerst de wereldlijn in de ruimte, die ontstaat door aan de verkregen ruimte nog een t - as toe te voegen is in die aldus verkregen ruimte geodetisch en de banen zijn slechts projecties in de richting van de t - as. Uit de figuur is duidelijk te zien dat voor twee punten in het $\chi\gamma$ - vlak $r_1 - r_2$, volstrekt niet de natuurlijk gemeten afstand is, maar ook dat $r_1 - r_2$ hoe langer hoe dichter tot dien afstand nadert, wanneer r_1 en r_2 groot worden t.o.van α .

De verschuiving der spectraallijnen.

Uit het vierdimensionale lijnelement volgt voor den eigentijd $d\tau$ voor een rustend punt (r , θ en φ constant)

$$127.1 \quad d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}$$

en dus voor twee punten op afstanden r_1 en r_2 en waarden dt , die bij eenzelfde waarde $d\tau$ hooren

$$127.2 \quad \frac{dt_1}{dt_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_2}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_1}}}$$

Uit deze vergelijking volgt dat een klok des te langzamer loopt, naarmate de afstand tot het gravitatiecentrum kleiner is. Wat voor een klok geldt moet ook voor een atoom gelden, de spectraallijnen van licht dat van het oppervlak van de zon komt, moeten dus naar het rood verschoven zijn. Is ν_1 frequentie van een spectraallijn op de zon, ν_2 die van dezelfde spectraallijn op aarde, R de straal van de zon en r_2 de straal van de aardbaan, dan is

$$127.3 \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{dt_2}{dt_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{R}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_2}}} \approx \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{R}}{1}$$

en dus

$$128.7 \quad \Delta \nu = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_2} = -\frac{1}{2} \frac{v}{R} = -1,2 \cdot 10^{-6} \quad 1)$$

welke waarde even groot is als die van een Doppler effect behorende bij een snelheid van 0,63 km per seconde. Het effect is buitengewoon moeilijk te meten omdat er tal van andere oorzaken zijn die een verschuiving der lijnen kunnen veroorzaken, als druk, Doppler effect, storing door naburige lijnen, anomale dispersie. De onderzoekingen moeten als nog niet afgesloten beschouwd worden.

Het praecessieeffect.

Er is nog een vierde effect, waarvan het bestaan het gemakkelijkste kan worden ingezien aan de hand van de door Flamm geconstrueerde afbeelding van de ruimte om de zon. Stel eens, dat men een lokaal assenstelsel in deze ruimte pseudoparallel in een cirkel om de zon voert. Dan zullen begin en eindstand niet samenvallen omdat de ruimte niet euklidisch is en men berekent gemakkelijk dat de afwijkingshoek bij één omloop $\pi \frac{a}{r}$ bedraagt. Voor de aarde zou dit beteekenen dat de aarde bij elk omloop een afwijking van 0,013 boogseconde zou krijgen. Nu zou die redeneering heelemaal juist zijn, indien in het vierdimensionale lijnelement $c^2 d\tau^2$ de term $c^2 dt^2$ stond en niet $c^2 (1 - \frac{a}{r}) dt^2$. Deze term maakt echter dat de tijd ook meedoet en men niet maar zoo zonder meer met pseudoparallele verplaatsingen in de driedimensionale ruimte mag rekenen. In werkelijkheid moet men een pseudoparallele verplaatsing in vier afmetingen langs de wereldlijn uitvoeren. Wordt dit gedaan, dan vindt men een praecessieeffect dat anderhalf maal zoo groot is, dus $\frac{3}{2} \pi \frac{a}{r}$ en dus voor de aarde 0,019 boogseconde bedraagt. Aangezien men de geheele bewerking ook kan toepassen op het

1) Enc. der Math. Wiss. VI 2 22a, F. Kottler.

stelsel aarde - maan, bestaat er ook een dergelijke afwijking voor de beweging van de maan.¹⁾ Beide afwijkingen (1,9 boogseconden per eeuw) zijn niet te klein voor de waarneming. In de berekening van de praecessie voor de aarde komen echter voor, de massa van de maan μ en een grootheid H , die van de traagheidsmomenten van de aarde afhangt. De onzekerheid van μ levert (1918) al een fout die $1\frac{1}{2}$ maal de nieuwe praecessie is. Ook de grootheid H is nog zeer onnauwkeurig bekend, men zou met de nauwkeurigheid een decimaal verder moeten zijn om de waarde te kunnen gebruiken. Ook de afwijking van de praecessie van de maan ligt vooralsnog binnen het gebied van onzekerheden in de constanten.

Eddington heeft uit het bestaan der praecessieafwijking de volgende belangrijke theoretische slotsom getrokken. Indien men met behulp van gyrostatische instrumenten de draaiing van de aarde zou meten, dan zou men vinden de draaiing t.o.v. van een geodetisch (d.i. pseudoparallel) meebewegend stelsel en niet die t.o.v. van de vaste sterren. De beweging t.o.v. van de vaste sterren kan dus alleen door astronomische metingen gevonden worden.



¹⁾ *Ann. der Math. Wiss.* VI 2. 22a, F. Kottler.